

Lagrangetheorie der Tensor- und Skalarmeson-Dominanz des Energie-Impuls-Tensors

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Kurt Müller
aus Berlin

1975

1976

Lagrangetheorie der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz des Energie-Impuls-Tensors

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Kurt Müller
aus Berlin

1975



1. Gutachter: Prof. Dr. J. Wess
2. Gutachter: Prof. Dr. F. Penzlin

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 1976

ZUSAMMENFASSUNG

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die feldtheoretische Formulierung der zur Vektormesonen-Dominanz des elektromagnetischen Stromes analogen Hypothese der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz (TMD bzw. SMD) des Energie-Impuls-Tensors. Die von Raman entwickelte, lorentzinvariante Lagrangetheorie der TMD und deren allgemein kovariante Formulierung nach Salam u.a. werden zunächst um die Einbeziehung der SMD erweitert. Das entscheidende Hilfsmittel ist hierbei die Forderung der Weyl-Invarianz, die in einem einleitenden Kapitel über die der Lagrangetheorie der TMD und SMD zugrundeliegenden Konzepte erläutert wird.

Aufbauend auf der Theorie, die die TMD mit der SMD vereinigt, werden anschließend die Kopplungen der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Zwei-Hadronenzustände (Pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Baryonen) untersucht.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<u>Einleitung</u>	1
 Kap.I <u>Formale Voraussetzungen</u>	 6
§ 1 Theorie der Gravitation	6
1.1 Allgemeine Relativitätstheorie im Tensorformalismus	6
1.2 Allgemeine Relativitätstheorie im Vierbeinformalismus	14
1.3 Lorentzinvariante Gravitationstheorie	21
§ 2 Theorie der Gravitation mit Skalar-Tensor-Mischung	27
2.1 Allgemein kovariante Theorie	27
2.2 Lorentzinvariante Theorie	31
§ 3 Weyl-Transformationen	35
3.1 Weyl-Transformationen und ihr Zusammenhang mit der Gruppe der konformen Transformationen im flachen Raum	35
3.2 Weylinvariante Wirkungsfunktionale	46
 Kap.II <u>Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz</u>	 53
§ 1 Erinnerung an die Lagrangetheorie der Vektormesonen-Dominanz	53
§ 2 Lorentzinvariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz	58
§ 3 Allgemein kovariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz nach Salam (f-g-Theorie)	66
§ 4 Die f-g-Theorie als Zwei-Tensor-Theorie der Gravitation (Konsistenz, Lösungen, Alternativen)	71
 Kap.III <u>Lagrangetheorie der Tensor-und Skalarmesonen-Dominanz</u>	 78
§ 1 Einbeziehung der Skalarmesonen-Dominanz in die lorentz-invariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz von Raman	78
§ 2 Einbeziehung der Skalarmesonen-Dominanz in die allgemein kovariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz von Salam	87

§ 3 Explizite Gestalt der hadronischen Lagrangefunktion	93
3.1 Die Nonetts der 2^+ - und 0^+ -Mesonen	93
3.1a Das f - f' - und ϵ - ϵ' -Mischungsproblem	94
3.1b Zum experimentellen Stand der 0^+ -Mesonen	100
3.2 Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Hadronen	103
3.2a Kopplung an pseudoskalare Mesonen	103
3.2b Kopplung an Vektormesonen	113
3.2c Kopplung an Baryonen	125
<u>Abschließende Bemerkungen</u>	136
<u>Anhang</u>	139
<u>Literaturverzeichnis</u>	145

EINLEITUNG

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die feldtheoretische Formulierung der Hypothese der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz (TMD bzw. SMD) des hadronischen Energie-Impuls-Tensors (EIT). Nach dieser Hypothese werden die Gravitationsformfaktoren ¹ (oder auch Masseformfaktoren) der Hadronen - d.h. die invarianten Funktionen, die in den Matrixelementen des EIT zwischen hadronischen Einteilchenzuständen auftreten - bei kleinen Impulsüberträgen von den isoskalaren 2^+ - und 0^+ -Mesonen dominiert, was gleichbedeutend ist mit einer universellen Kopplung dieser Mesonen an hadronische Materie.

Die der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz zugrundeliegende Idee hat ihren Ursprung in der Analogie zur bekannten Hypothese der Vektormesonen-Dominanz (VMD) des hadronischen elektromagnetischen Stromes, nach welcher die elektromagnetischen Formfaktoren der Hadronen von den neutralen Vektormesonen dominiert werden ². Es war daher naheliegend zu fragen, ob nicht in Analogie zu der von Kroll, Lee und Zumino ³ (KLZ) entwickelten Lagrangetheorie der VMD auch die Hypothesen der TMD und SMD im Rahmen einer Lagrangetheorie ausgedrückt werden könnten, in der sich die Spin2- und Spin0-Komponente des EIT als Linearkombination der Felder der isoskalaren Spin2- und Spin0-Mesonen darstellen. Was die TMD angeht, so ist dieses Problem bereits vor längerer Zeit von Raman ^{4,5} gelöst worden. Die von ihm aufgestellte Lagrangetheorie der TMD befindet sich in strikter Analogie zur Theorie von KLZ, d.h. sie geht aus deren Isovektoranteil hervor, wenn man dort das Photonfeld durch das lineare Gravitationsfeld und das massive Vektorfeld durch ein massives, isoskalares Tensorfeld ersetzt. An die Stelle der Stromfeld-Identität, durch die sich die VMD ausdrückt, tritt dann die Beziehung

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (F_{\mu\nu}^0 - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{0\lambda}) \quad (1)$$

die den EIT $T_{\mu\nu}$, die Quelle des Gravitationsfeldes, mit dem massiven Tensorfeld $F_{\mu\nu}^0$ verknüpft. Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich ohne weiteres auf eine Linearkombination der Felder der beiden in der Natur vorhandenen isoskalaren Tensormesonen f und f' erweitern.

Die SMD bleibt in der Theorie von Raman unberücksichtigt, da die Spur, d.h. der Spin0-Anteil des Tensorfeldes $F_{\mu\nu}^0$ i.a. zwar von Null verschieden ist, aber nicht das Feld eines isoskalaren Spin0-Teilchens beschreibt. Ein weiterer Mangel dieser Theorie ist auch der, daß sie auf der linearisierten Version der Einsteinschen Gravitationstheorie basiert und daher nicht allgemeinkovariant ist. Dieser Defekt konnte jedoch von Isham, Salam und Strathdee (ISS)⁶ und von Zumino in Zusammenarbeit mit Wess (WZ)⁷ behoben werden. Den genannten Autorengruppen ist es - unabhängig voneinander - gelungen, eine allgemein kovariante Lagrangetheorie der TMD zu entwickeln, die bei Linearisierung in die von Raman übergeht. Beide Arbeiten stimmen im wesentlichen überein, jedoch benutzen ISS den üblichen Tensorformalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie, während WZ im Vierbeinformalismus rechnet. Leitgedanke ist jeweils die Hypothese, daß das Gravitationsfeld nicht direkt an hadronische Materie koppelt, sondern nur über Vermittlung eines massiven Tensorfeldes $f_{\mu\nu}$ das seinerseits sowohl mit den Hadronen wie mit dem Gravitationsfeld in direkter Wechselwirkung steht. Der entscheidende Schritt, der es gestattet, sich von der Beschränkung auf die linearisierte Gravitationstheorie zu befreien, besteht darin, nicht nur das Einsteinsche Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$, sondern auch das Tensorfeld $f_{\mu\nu}$ als selbstwechselwirkendes Feld zu behandeln. Letzteres verhält sich unter allgemeinen Koordinatentransformationen genauso wie $g_{\mu\nu}$ und koppelt an den EIT der hadronischen Materie, während $g_{\mu\nu}$ an den der übrigen Materie koppelt. M.a.W. wir haben es bei der Theorie von ISS bzw. WZ mit einer bi-metrischen Theorie zu tun, in der $f_{\mu\nu}$ für die hadronischen Felder die gleiche Rolle spielt, wie sie $g_{\mu\nu}$ in konventionellen Theorien für die gesamte Materie spielt. Es ist daher nicht verwunderlich, daß die Theorie von ISS bzw. WZ - die auch unter dem Schlagwort "f-g-Theorie der Gravitation" bekannt geworden ist - nicht nur für die Elementarteilchen-Physik, sondern auch für die Allgemeine Relativitätstheorie von Bedeutung ist. Wir werden uns später noch eingehend mit ihr beschäftigen und auch die diversen Beiträge⁸⁻¹⁸ erläutern, die hierzu von Autoren geliefert worden sind, deren Hauptinteresse der Allgemeinen Relativitätstheorie gilt.

Um in die allgemein kovariante Lagrangetheorie von ISS bzw. WZ auch die f-f-Mischung einzubeziehen, machten Arnowitt et al.¹⁹ den Vorschlag, der f-Metrik

weitere "starke" Metrik zur Seite zu stellen, um so den f-f'-Komplex in einheitlicher Weise nach dem Muster von ISS bzw. WZ beschreiben zu können. Führt man jedoch diesen Gedanken konsequent weiter, so ist man gezwungen, ein ganzes Nonett $f_{\mu\nu}^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) "starker" Metriken einzuführen, und dies bringt, wie Isham²⁰ gezeigt hat, erheblichen rechnerischen Aufwand mit sich. Wess²¹ umging diese Schwierigkeiten, indem er bei einer starken f-Metrik blieb und diese dem Singlett des 2^+ -Mesonen-Nonetts zuordnete, während er die isoskalare Komponente des verbleibenden Oktetts durch die mit der f-Metrik kovariantisierte Lagrangefunktion eines üblichen Pauli-Fierz-Feldes beschrieb. Die f-f'-Mischung wird bei Wess durch Hinzufügen eines kovarianten Mischungsterms zwischen dem gen. Pauli-Fierz-Feld und der "starken" Metrik $f_{\mu\nu}$ berücksichtigt. Die theoretischen Voraussagen für die Kopplung des f- und f'-Mesons an pseudoskalare Mesonen stimmen mit dem Experiment gut überein.

Die zuvor zitierten Arbeiten von Arnowitt et al.¹⁹ und Wess²¹ sind besonders bemerkenswert, weil in ihnen neben der TMD auch die SMD realisiert wird, d.h. die Quelle-Feld-Identität (1) wird ersetzt durch die Beziehung

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (F_{\mu\nu}^{\circ} - \gamma_{\mu\nu} F_{,\lambda}^{\circ,\lambda}) + \frac{\lambda_g}{3m^2} (\partial_\mu \partial_\nu - \gamma_{\mu\nu} \square) \phi \quad (2)$$

die den (divergenzfreien und spurlosen) Spin2-Anteil des EIT $T_{\mu\nu}$ mit dem des Tensorfeldes $F_{\mu\nu}^{\circ}$ verknüpft:

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = \lambda_f F_{\mu\nu}^{\circ(2)} \quad (2a)$$

und seinen Spin0-Anteil $T_{,\lambda}^{\lambda}$ mit dem isoskalaren Spin0-Feld ϕ :

$$T_{,\lambda}^{\lambda} = \lambda_g \phi \quad (2b)$$

In beiden Arbeiten ist die SMD, d.h. Gl. (2b) Ausdruck der gebrochenen Weylinvarianz (die im flachen Raum der Invarianz unter Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen äquivalent ist), jedoch sind die Ansatzpunkte sehr verschieden. Arnowitt et al. ordnen sämtlichen Hadronfeldern, darunter auch dem f-Feld, ein von Null verschiedenes Weylgewicht zu. Dagegen spielt in ihrer Theorie das Verhalten des Gravitationsfeldes $g_{\mu\nu}$ unter Weyltransformationen überhaupt keine Rolle.

Die Weylinvarianz der hadronischen Lagrangefunktion wird durch den freien Anteil (kinetischer Term + Massenterm) des isoskalaren 0^+ -Feldes σ gebrochen. Dieses verhält sich unter Weyltransformationen wie ein Dilaton²² und koppelt an die Spur des "verbesserten" EIT^{23,24} der übrigen Hadronen. Bei Wess dagegen ist es in gewisser Hinsicht umgekehrt: Die einzigen Felder, deren Verhalten unter Weyltransformationen hier entscheidend ist, sind das Gravitationsfeld und das ebenfalls als Dilaton interpretierte isoskalare 0^+ -Feld σ , das der bei 700 MeV vermuteten $\pi\pi$ -Resonanz zugeordnet wird. Sämtlichen hadronischen Feldern dagegen wird das Weylgewicht Null zugeordnet, insbesondere auch dem f -Feld. Die Weylinvarianz der vollen Lagrangefunktion wird allein durch den Massenterm des Dilaton-Feldes gebrochen, und dessen Kopplung an die Hadronen kommt erst durch eine Felddiagonalisierung ins Spiel. Diese hat zur Folge, daß das Dilaton-Feld an die Spur des "normalen" EIT (d.h. Belinfante-Tensors) der Hadronen koppelt, während - wie oben bereits erwähnt - bei Arnowitt et al.¹⁹ das Dilaton-Feld an die Spur des "verbesserten" EIT der Hadronen koppelt. Den Schwierigkeiten, die bei der letzten Art von Kopplung auftreten (sie liefert eine weitaus zu starke Kopplung des ϵ -Mesons an Nukleonen²⁴), versuchen Arnowitt et al. dadurch zubegegnen, daß sie ihr Konzept auf die Existenz zweier Dilaton-Felder, d.h. zweier isoskalarer 0^+ -Resonanzen, ausdehnen. An dieser Stelle benutzen sie jedoch gleichzeitig den bzgl. der SU(3) unvollständig entwickelten Formalismus zweier "starker" Metriken und berufen sich zudem auf experimentelle Daten, die - wie wir später sehen werden - keineswegs verläßlich sind. Als Vorzug gegenüber der Wess'schen Theorie empfinden wir es dagegen, daß Arnowitt et al. die f -Metrik auch hinsichtlich der Weyltransformationen auf die gleiche Stufe stellen wie die g -Metrik und den hadronischen Feldern nicht das Weylgewicht Null zuordnen. Auf diese Weise erkennt man nämlich deutlicher, wie das Dilaton an die übrigen Hadronen koppelt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, die Kopplungen der isoskalaren 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Zwei-Hadronenzustände (pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Nukleonen) aus einem allgemeinen Lagrangeprinzip herzuleiten.

Als Ausgangspunkt benutzen wir hierbei die Ramansche Lagrangetheorie der TMD bzw. deren allgemein kovariante Version nach ISS und werden diese, ähnlich wie Arnowitt et al. es getan haben, so modifizieren, daß in ihr auch die SMD zum Ausdruck kommt. Im einzelnen ist der Plan unserer Arbeit folgender: Wir beginnen mit einem Kapitel über die Konzepte, die der Konstruktion einer Lagrangetheorie der TMD und SMD zugrundeliegen. Hierzu gehören neben den Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie auch die Theorie der Gravitation mit Skalar-Tensor-Mischung und vor allem der für uns wichtige Begriff der Weyltransformationen. Das folgende Kapitel enthält eine detaillierte Darstellung der Lagrangetheorie der TMD nach Raman und ISS. In dem sich anschließenden Hauptteil unserer Arbeit werden wir zunächst zeigen, wie sich in die lorentzinvariante Theorie von Raman die SMD einbauen läßt. Die erstrebte Proportionalität zwischen der Spur des EIT und dem Feld eines isoskalaren 0^+ -Mesons interpretieren wir zunächst nicht als Ausdruck der gebrochenen Skaleninvarianz der Theorie, sondern als Quelle-Feld-Identität. Wir stützen uns daher auf die (lineare) Theorie der Gravitation mit Skalar-Tensor-Mischung, in der die Spur des EIT als Quelle des skalaren Gravitationsfeldes fungiert. Im Anschluß daran beschäftigen wir uns mit der analogen Erweiterung der allgemein kovarianten Theorie von ISS, wobei wir jetzt die SMD durch die Brechung der Weylinvarianz der hadronischen Lagrangefunktion realisieren. Es wird sich jedoch zeigen, daß die linearisierte Version der erweiterten Theorie identisch ist mit der zuvor konstruierten, lorentzinvarianten Theorie, die die TMD mit der SMD vereinigt.

Gegenstand des letzten Abschnitts werden die sich aus der Theorie ergebenden Konsequenzen für die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Baryonen sein.

In einem Anhang schließlich geben wir einen Überblick über die historische Entwicklung der Idee der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz - von ihren ersten Ansätzen bis hin zu ihrer feldtheoretischen Formulierung, die Gegenstand dieser Arbeit ist.

K A P I T E L I

Formale Voraussetzungen

In diesem ersten Kapitel unserer Arbeit sollen zunächst die Konzepte dargelegt werden, auf denen die im folgenden zu behandelnde Lagrangetheorie der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz aufbaut. Wir beginnen mit einer kurzen Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) und skizzieren anschließend die lorentzinvariante Gravitationstheorie, die der Ramanschen Lagrangetheorie der TMD zugrundeliegt. Inhalt des folgenden Abschnitts wird die Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung sein, auf die wir uns bei der Einbeziehung der SMD in die soeben genannte Ramansche Lagrangetheorie der TMD stützen werden. Ein weiterer Abschnitt schließlich wird dem Begriff der Weyl-Transformationen gewidmet sein, der sich im Verlauf unserer Arbeit als von entscheidender Bedeutung herausstellen wird.

§ 1 Theorie der Gravitation ⁺⁾

1.1 Allgemeine Relativitätstheorie im Tensorformalismus

Bei der Konstruktion der ART ließ sich Einstein - mehr oder weniger intuitiv - von einem Prinzip leiten, das man heute als schwaches Äquivalenzprinzip bezeichnet. Es besagt, daß in jedem lokal ebenen System für die nicht-gravitativen Felder die spezielle Relativitätstheorie gilt, d.h. daß in einem infinitesimalen, frei fallenden Kasten das äußere Gravitationsfeld keinen Einfluß auf die nicht-gravitativen Felder hat. Ursprung dieses Prinzips ist die vom Experiment ausgezeichnet bestätigte Gleichheit von träger und schwerer Masse. Es hat zur Folge, daß der Beobachter eines Massenpunktes in einem gegebenen Koordinatensystem bei einer Beschleunigung des Massenpunktes gegen dieses System nicht entscheiden kann, ob diese Beschleunigung von einem Schwerfeld oder von Trägheitsfeldern herrührt. Diese Ununterscheidbarkeit führte Einstein zu dem Schluß, daß die Gravitation mit denselben Mitteln zu beschreiben sei wie die Trägheitskräfte in beschleunigten

⁺⁾ In unserer Darstellung stützen wir uns im wesentlichen auf die unter (25-28) genannten Bücher.

Bezugssystemen, nämlich durch eine Metrik verschieden von der des flachen Raumes, genauer gesagt: durch die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ eines Riemannschen Raumes. Garantiert wird das schwache Äquivalenzprinzip durch die Vorschrift der sog. m i n i m a l e n K o p p l u n g, nach der in den speziell relativistischen Gleichungen im Falle eines äußeren Gravitationsfeldes die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ und die normalen partiellen Ableitungen durch die allgemein kovarianten zu ersetzen sind. Einstein fügte dem schwachen Äquivalenzprinzip noch das Postulat hinzu, daß in einem frei fallenden Kasten auch die lokalen g r a - v i t ä t i v e n Vorgänge durch ein äußeres Gravitationsfeld nicht beeinflußt werden. Dieses Postulat bildet zusammen mit dem schwachen Äquivalenzprinzip das sog. starke Äquivalenzprinzip. Nach ihm wird das Gravitationsfeld allein durch die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}(x)$ beschrieben, d.h. es bedarf keiner weiteren Feldgrößen, um die Gravitation vollständig zu beschreiben.

Das Wirkungsfunktional des durch $g_{\mu\nu}(x)$ beschriebenen Gravitationsfeldes wird nun festgelegt durch zwei Forderungen:

1. Es muß invariant sein gegen allgemeine Koordinatentransformationen (Prinzip der Parameterinvarianz).
2. Die resultierenden Feldgleichungen sollen keine höheren als zweite Ableitungen von $g_{\mu\nu}(x)$ enthalten.

Die erste Forderung ist erfüllt, wenn das Wirkungsfunktional die Gestalt

$$A_G = \int d^4x \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} L_G$$

besitzt und L_G sich unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie ein Skalar verhält. Anscheinend darf dann L_G , um der zweiten Forderung zu genügen, neben $g_{\mu\nu}$ selbst nur noch erste Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthalten. Nun ist aber bekannt, daß sich aus $g_{\mu\nu}$ und seinen ersten Ableitungen kein Skalar konstruieren läßt. Dagegen existiert genau ein Skalar, der neben $g_{\mu\nu}$ und seinen ersten Ableitungen auch zweite Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthält, letztere jedoch nur linear. Er ist gegeben durch den Riemannschen Krümmungsskalar

$$R(g) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g) \quad (1)$$

wobei $g^{\mu\nu}$ als Inverses zu $g_{\mu\nu}$ definiert ist:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (2)$$

und $R_{\mu\nu}(g)$ den aus dem Riemannschen Krümmungstensor $R^{\beta}_{\mu\alpha\nu}(g)$ hervorgehenden Ricci-Tensor bedeutet:

$$R_{\mu\nu}(g) = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}(g) \quad (3)$$

$R^{\beta}_{\mu\alpha\nu}$ selbst ist definiert durch den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen, z.B. eines Vektors V_{μ} :

$$V_{\mu;\nu;\alpha} - V_{\mu;\alpha;\nu} = V_{\beta} R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} \quad (4)$$

wobei die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensors $T^{\mu\dots}_{\nu\dots}$ gegeben ist durch

$$T^{\mu\dots}_{\nu\dots;\rho} = T^{\mu\dots}_{\nu\dots;\rho} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} T^{\sigma\dots}_{\nu\dots} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} T^{\mu\dots}_{\sigma\dots} + \dots \quad (5)$$

mit den durch die Christoffelsymbole

$$\{\overset{\alpha}{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (6)$$

gegebenen Zusammenhangskoeffizienten

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \{\overset{\alpha}{\mu\nu}\} \quad (7)$$

Für den Krümmungstensor bedeutet dies:

$$R^{\beta}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \quad (8)$$

Hieraus und aus der Definition der Christoffelsymbole folgt, daß $R^{\beta}_{\mu\alpha\nu}$ bzw. $R(g) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ zwar auch zweite Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthält, diese jedoch nur in linearer Form. Daher kann das Integral $\int d^4x \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in einen Ausdruck verwandelt werden, der keine zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthält.

Das Wirkungsfunktional der Gravitation, das den oben genannten Forderungen genügt, lautet somit:

$$A_G = \frac{1}{2\kappa^2_g} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g) \quad (9)$$

⁺) Wir kennzeichnen im folgenden die kovariante Ableitung stets durch ein Semikolon, die gewöhnliche partielle Ableitung dagegen i.a. durch ein Komma.

⁺⁺) Die Möglichkeit, daß zu L_G noch eine Konstante hinzutritt, soll hier nicht betrachtet werden, da diese in den Feldgleichungen der Gravitation das Auftreten eines "kosmologischen Gliedes" zur Folge hätte.

wobei die Abkürzung

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} \quad (10)$$

eingeführt wurde und κ_g^2 der Newtonschen Gravitationskonstanten G proportional ist:

$$\kappa_g^2 = 8\pi G \quad (c = \hbar = 1!) \quad (11)$$

Um zu den Eulerschen Gleichungen für $g_{\mu\nu}$ zu gelangen, betrachtet man i.a. die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ als durch (7) gegebene Funktionen von $g_{\mu\nu}$. Man kann sie jedoch auch als unabhängige Variable auffassen und nach beiden Größen, d.h. nach $g_{\mu\nu}$ und $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, getrennt variieren. Die Durchführung dieser Variation liefert dann die Feldgleichungen für $g_{\mu\nu}$ und - als Nebenbedingung - die Beziehung (7) zwischen $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ und $g_{\mu\nu}$. Dieser zweite Formalismus wurde von Palatini ²⁹ in die ART eingeführt und erweist sich als besonders geeignet bei der quantenfeldtheoretischen Formulierung der linearen Gravitationstheorie ³⁰. Im folgenden wollen wir jedoch $g_{\mu\nu}$ als die einzig unabhängige Variable betrachten. Bemerkt sei noch, daß der Palatini-Formalismus dem aus der Elektrodynamik bekannten Formalismus entspricht, in welchem das elektromagnetische Potential A_μ und der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ beide als unabhängige Größen betrachtet werden.

Zur Herleitung der vollständigen Feldgleichungen der Gravitation ist das Wirkungsfunktional (9) des freien Gravitationsfeldes zu ergänzen durch den Materieanteil

$$A_M = \int d^4x \sqrt{-g} L_M(\psi, g_{\mu\nu}) \quad (12)$$

wo $L_M(\psi, g_{\mu\nu})$ die nach der Vorschrift der minimalen Kopplung kovariantisierte Lagrangefunktion der durch ψ bezeichneten Materiefelder darstellt. Die Variation von

$$A = A_G + A_M$$

liefert dann die Einsteinschen Gleichungen

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa_g^2 T_{\mu\nu} \quad (13)$$

mit dem durch

$$T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu}) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_M(\psi, g_{\mu\nu}))}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (14)$$

definierten, symmetrischen Energie-Impuls-Tensor der Materie, der beim Übergang zum flachen Raum in den symmetrischen Belinfante-Tensor übergeht:

$$T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}(\psi) \quad (15)$$

Es ist klar, daß $T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$ auch Beiträge des Gravitationsfeldes enthält, da ja in $T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$ der metrische Tensor und die Zusammenhangskoeffizienten auftreten. Dagegen enthält $T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$ keine Beiträge von Gravitationswellen, die sich von ihren materiellen Quellen gelöst haben.

Wichtig ist die Feststellung, daß aufgrund der für den Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$ geltenden Identität

$$G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \quad (16)$$

die kovariante Divergenz von $T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$ verschwindet:

$$T_{\mu\nu}(\psi, g_{\mu\nu})^{;\nu} = 0 \quad (17)$$

Diese Beziehung ist das allgemein kovariante Analogon der Divergenzgleichung

$$T_{\mu\nu}(\psi)^{,\nu} = 0 \quad (18)$$

hat jedoch keineswegs die Bedeutung eines differentiellen Erhaltungssatzes. Die Gl.(17) :

$$T_{\mu;\nu}{}^{\nu} = T_{\mu,\nu}{}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\nu} T_{\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} T^{\kappa}_{\lambda} = 0$$

besagt, daß $T_{\mu}^{\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$, die Quelle des Gravitationsfeldes, nicht für sich allein erhalten sein kann. Da das Gravitationsfeld mit sich selbst wechselwirkt, kann nur eine Kombination aus $T_{\mu}^{\nu}(\psi, g_{\mu\nu})$ und einer entsprechenden rein gravitären Größe $t_{\mu}^{\nu}(g)$ erhalten sein. Um einen solchen divergenzfreien "Energie-Impuls-Komplex"

$$\Theta_{\mu}^{\nu} \equiv \sqrt{-g} (T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) \quad (19)$$

zu konstruieren, der die Definition eines erhaltenen Impulsvektors ermöglicht, geht man von der oben genannten Tatsache aus, daß sich die Einsteinsche Lagrangedichte der Gravitation

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa_g^2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)$$

aufspalten läßt in eine Summe von Termen, deren erster Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ nicht höherer als erster Ordnung enthält und deren zweiter ein Divergenzterm ist:

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa_g^2} \{ \alpha + \mathcal{B}^\mu{}_{,\mu} \} \equiv \frac{1}{2\kappa_g^2} \{ (\sqrt{-g} A) + (\sqrt{-g} B^\mu)_{,\mu} \} \quad (20)$$

mit

$$A = g^{\mu\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\beta}) \quad (20a)$$

und

$$B^\mu = g^{\mu\alpha} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \quad (20b)$$

Da sich nun $\mathcal{L}_G$ unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie eine skalare Dichte verhält, folgt aus der zugehörigen Noether-Identität bei Berücksichtigung des Transformationsverhaltens von $g_{\mu\nu}$ die Beziehung

$$g_{\mu\lambda} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{;\nu} = 0$$

oder

$$\left(g_{\mu\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (21)$$

Da die Variationsableitung einer Divergenz verschwindet, ist

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta \alpha}{\delta g_{\mu\nu}}$$

und somit

$$\left(g_{\mu\lambda} \frac{\delta \alpha}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} \left(\frac{\delta \alpha}{\delta g_{\mu\nu}} \right) = 0 \quad (22)$$

Der zweite Term auf der linken Seite dieser Gleichung läßt sich aufgrund von

$$\alpha_{,\lambda} = \frac{\partial \alpha}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\mu\nu,\lambda} + \frac{\partial \alpha}{\partial g_{\mu\nu,\kappa}} g_{\mu\nu,\kappa\lambda}$$

durch eine Divergenz ausdrücken:

$$g_{\mu\nu,\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = (u_\lambda \delta_\lambda^\mu - \frac{\partial u_\lambda}{\partial g_{\mu\nu,\kappa}} g_{\mu\nu,\lambda})_{,\kappa}$$

Da ferner

$$g_{\mu\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} (R^\nu_\lambda - \frac{1}{2} \delta^\nu_\lambda R) = -\kappa^2 \sqrt{-g} T^\nu_\lambda \quad (23)$$

liegt es nahe, die oben eingeführte Größe $t^\nu_\lambda(g)$ zu definieren durch

$$t^\nu_\lambda = \frac{1}{2\kappa^2} (A \delta^\nu_\lambda - \frac{\partial A}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} g_{\mu\nu,\lambda}) \quad (24)$$

was der üblichen Definition des EIT entspricht. Jedoch stellt $t^\nu_\lambda(g)$ keinen Tensor dar, da A - im Gegensatz zu $R(g)$ - kein Skalar ist. Aus diesem Grund wird $t^\nu_\lambda(g)$ meist als Pseudotensor bezeichnet.

Mit der Definition (24) geht dann Gl.(22) bei Beachtung von (23) über in die Divergenzgleichung

$$\{\sqrt{-g} (T^\nu_\lambda + t^\nu_\lambda)\}_{,\nu} = 0 \quad (25)$$

und die Größe

$$\theta^\nu_\lambda = \sqrt{-g} (T^\nu_\lambda + t^\nu_\lambda) \quad (26)$$

stellt den gesuchten Energie-Impuls-Komplex dar. Wie wir soeben gesehen haben, ist θ^ν_λ zwar divergenzfrei, besitzt jedoch nicht den Charakter einer Tensordichte, da $\sqrt{-g} t^\nu_\lambda$ sie nicht besitzt; auch ist $\theta^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} \theta^\nu_\lambda$ nicht symmetrisch in μ und ν , so daß sich aus $\theta^{\mu\nu}$ kein Drehimpulstensor bilden läßt.

Da die Divergenzbeziehung (25) aus der Identität (21) hervorgegangen ist, stellt sie selbst natürlich auch eine Identität dar. Dies bedeutet, daß sich θ^ν_λ durch ein Superpotential mit identisch verschwindender Divergenz darstellen läßt, d.h. man kann schreiben

$$\theta^\nu_\lambda = U_{\lambda}^{[\nu\alpha]}_{,\alpha} \quad (27)$$

wobei das gesuchte Superpotential $U_{\lambda}^{[\nu\alpha]}$ antisymmetrisch in den oberen Indizes ist:

$$U_{\lambda}^{[\nu\alpha]} = -U_{\lambda}^{[\alpha\nu]} \quad (28)$$

P. von Freund ³¹ hat gezeigt, daß sich dieses Superpotential schreiben läßt in der Form

$$U_{\lambda}^{[\nu\sigma]} = \frac{1}{2\kappa_g} (-g)^{-1/2} g_{\lambda\beta} [g(g^{\nu\alpha} g^{\sigma\beta} - g^{\sigma\alpha} g^{\nu\beta})]_{,\alpha} \quad (29)$$

wobei die Feldgleichungen (13) benutzt worden sind, um in (26) T^{ν}_{λ} durch G^{ν}_{λ} auszudrücken.

Ein symmetrischer Energie-Impuls-Komplex schließlich, der die Konstruktion eines Drehimpulstensors gestattet, ist von Landau und Lifshitz ³² angegeben worden. Er lautet:

$$\bar{\theta}^{\mu\nu} = \bar{U}^{\mu[\nu\sigma]}_{, \sigma} = (-g) (T^{\mu\nu} + \bar{t}^{\mu\nu}) \quad (30)$$

mit

$$\bar{U}^{\mu[\nu\sigma]} = (-g)^{1/2} g^{\mu\alpha} U_{\alpha}^{[\nu\sigma]} = -\bar{U}^{\mu[\sigma\nu]} \quad (31)$$

und

$$\bar{t}^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} t^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2} (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha})_{, \alpha} U^{\nu\sigma}_{\sigma} \quad (32)$$

Tatsächlich gibt es, wie Bergmann ³³ gezeigt hat, eine unendliche Anzahl von Möglichkeiten, einen symmetrischen und divergenzfreien Energie-Impuls-Komplex zu konstruieren. Sämtliche dieser Energie-Impuls-Komplexe unterscheiden sich durch eine Viererdivergenz voneinander, und keiner von ihnen verhält sich unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie ein kovarianter Tensor. Für eine weitere Diskussion dieses und anderer damit zusammenhängender Probleme verweisen wir auf die Literatur ^{25,26,33}.

1.2 Allgemeine Relativitätstheorie im Vierbeinformalismus

Nach dem Einsteinschen Prinzip der allgemeinen Kovarianz lassen sich Gravitationseffekte in eine lorentzinvariante Theorie dadurch einbeziehen, daß man alle Lorentztensoren $T_{\alpha\beta\cdots}^{\mu\nu\cdots}$ als Welttensoren $T_{ab\cdots}^{mn\cdots}$ betrachtet, die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ durch die von Raum und Zeit abhängende Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ und die gewöhnliche partielle Ableitung durch die allgemein kovariante Ableitung ersetzt. Diese Methode läßt sich jedoch nicht anwenden, wenn Spinoren in einer Theorie auftreten. Der Grund hierfür ist der, daß es keine Darstellungen der $GL(4, \mathbb{R})$, d.h. der Gruppe der allgemeinen linearen, regulären 4×4 -Matrizen gibt, die sich bezüglich der Untergruppe der Lorentztransformationen wie Spinoren verhalten^{34,35}. Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit bietet der von Weyl³⁶ im Jahre 1929 entwickelte Vierbeinformalismus, der später von Utiyama³⁷ und Kibble³⁸ unter dem Gesichtspunkt des Yang-Lills'schen Eichprinzips³⁹ weiter ausgebaut wurde. Das Gravitationsfeld erscheint jetzt als Eichfeld der lokalen $SL(2, \mathbb{C})$ -Eichgruppe, d.h. der Symmetriegruppe unter orts-abhängigen Lorentztransformationen. Dieser Aspekt der ART, der in der Sprache des üblichen Tensorformalismus verdeckt bleibt, ist gerade in jüngster Zeit von verschiedenen Autoren weiter verfolgt worden. So konnte z.B. Carmeli⁴⁰ zeigen, daß sich die Bewegungsgleichungen des freien Gravitationsfeldes auf die Gestalt freier Yang-Mills-Gleichungen bringen lassen, und Salam⁴¹ benutzte den Vierbeinformalismus, um eine $SL(6, \mathbb{C})$ -eichinvariante Lagrangetheorie zu konstruieren, die ein $SU(3)$ -Nonett massiver Spin-2-Teilchen beschreibt (vgl. hierzu auch S. 144).

Ausgangspunkt des Vierbeinformalismus ist das (schwache) Äquivalenzprinzip, nach dem an einem beliebigen Weltpunkt $x = X$ stets ein lokales Inertialsystem errichtet werden kann mit orthogonalen Achsen $\xi^a_X(x)$ ($a = 0, 1, 2, 3$). In den Koordinaten $\xi^a_X(x)$ geht der metrische Tensor am Punkt X in die Minkowski-Metrik über:

$$\left[\frac{\partial \xi^a_X(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b_X(x)}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(x) \right]_{x=X} = \eta^{ab} \quad (1)$$

Die Transformationsmatrizen

$$e^a_\mu = \frac{\partial \xi^a_X(x)}{\partial x^\mu} \quad (2)$$

stellen offenbar vier kovariante Weltvektoren dar:

$$e^a_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e^a_{\nu}(x) \quad (a = 0, 1, 2, 3) \quad (3)$$

während sie sich unter homogenen, lokalen Lorentztransformationen wie ein Lorentzvektor verhalten:

$$e^{a'}_{\mu}(x) = L^a_{\alpha}(x) e^{\alpha}_{\mu}(x) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (4)$$

Man nennt die $e^a_{\mu}(x)$, die in den lokalen Inertialsystemen am Punkte x die Richtungen der Lorentzachsen ξ^a_X angeben, **Vierbeine** oder **Tetraden**. Der Zusammenhang zwischen $e^a_{\mu}(x)$ und $g_{\mu\nu}(x)$ für beliebige x ist aufgrund von (1) gegeben durch

$$e^a_{\mu}(x) e^b_{\nu}(x) \eta_{ab} = g_{\mu\nu}(x) \quad (5)$$

Definiert man nun die zu $e^a_{\mu}(x)$ reziproke Größe e_a^{μ} durch

$$e_a^{\mu} e^b_{\mu} = \delta_a^b \text{ bzw. } e_a^{\mu} e_{\mu}^{\nu} = \delta_a^{\nu} \quad (6a,b)$$

so folgt hieraus unmittelbar:

$$e_a^{\mu} \eta^{ab} e_b^{\nu} = g^{\mu\nu} \quad (7)$$

Hiermit konsistent ist die Vereinbarung, griechische (Welt-)Indizes mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu heben bzw. zu senken:

$$e^{a\mu} = e^a_{\nu} g^{\nu\mu}, \quad e_{a\mu} = e_a^{\nu} g_{\nu\mu} \quad (8a,b)$$

lateinische (Lorentz-)Indizes dagegen mit der Lorentz-Metrik η_{ab} :

$$e^{a\mu} = e^{\mu}_{\alpha} \eta^{a\alpha}, \quad e_{a\mu} = e^{\alpha}_{\mu} \eta_{a\alpha} \quad (9a,b)$$

Betrachtet man in den Gleichungen (5, 7) die Ausdrücke auf der linken Seite als Produkte von Matrizen, so erhält man hieraus die Determinantengleichungen

$$e \equiv \det e^a_{\mu} = - \det e_{a\mu} = (- \det g_{\mu\nu})^{1/2} \equiv (-g)^{1/2} \quad (10)$$

und

$$\det e_a^{\mu} = - \det e^{a\mu} = (-g)^{-1/2} \quad (11)$$

Es ist klar, daß man mit Hilfe der Vierbeinfelder einen beliebigen Welt-tensor in einen Lorentztensor und umgekehrt einen Lorentz-Tensor in einen Welttensor verwandeln kann, z.B.:

$$e_{\mu}^a e_{\nu}^b e^{\alpha c} T_{\alpha}^{\mu\nu}(x) = T^{abc}(x)$$

$$e_{\mu a} e_{\nu b} e_{\alpha}^c T_c^{\alpha b}(x) = T_{\mu\nu a}(x)$$

Die Auswahl der lokalen Inertialsystem ist nur bis auf lokale Lorentztransformationen festgelegt. Dies spiegelt sich wider in der Tatsache, daß das transformierte Vierbeinfeld

$$e'^a_{\mu}(x) = L^a_c(x) e^c_{\mu}(x)$$

zum selben metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ führt wie das ursprüngliche:

$$g'_{\mu\nu} = e'^a_{\mu} e'^b_{\nu} \eta_{ab} = L^a_c L^b_d e^c_{\mu} e^d_{\nu} \eta_{ab} = e^c_{\mu} e_{c\nu} = g_{\mu\nu}$$

Da die homogene Lorentzgruppe eine sechsparametrige Gruppe ist, enthält also $e^a_{\mu}(x)$ für ein vorgegebenes $g_{\mu\nu}(x)$ zunächst sechs beliebige Funktionen. Fordert man jedoch, daß das Vierbeinfeld $e^a_{\mu}(x)$ nicht mehr Information über die Raum-Zeit-Struktur enthält als die 10 unabhängigen Komponenten von $g_{\mu\nu}(x)$, so hat man von einer Vierbeintheorie neben der allgemeinen Kovarianz auch Invarianz unter lokalen Lorentztransformationen zu verlangen, um die Zahl der unabhängigen Komponenten auf zehn zu reduzieren.

Um aus einer lorentzinvarianten Theorie mit Hilfe der Vierbeinfelder eine allgemein kovariante Theorie zu gewinnen, betrachtet man sämtliche Felder - seien es solche mit ganz- oder halbzahligen Spin - als Weltskalare und bezieht ihre Komponenten auf die lokalen Lorentzsysteme. Dann steht man jedoch vor der Aufgabe, auch die gewöhnliche partielle Ableitung ∂_{μ} in einen Lorentzvektor zu verwandeln. Die durch Kontraktion von ∂_{μ} mit e_a^{μ} entstehende Größe $e_a^{\mu} \partial_{\mu}$ hat zwar den Transformationscharakter eines Welt-skalars, doch transformiert $e_a^{\mu} \partial_{\mu} \psi$ unter lokalen Lorentztransformationen nicht homogen. Ist nämlich ψ ein Feld, das sich nach irgendeiner Darstellung der Lorentzgruppe transformiert:

$$\delta \psi(x) = \frac{i}{2} \theta_{ab}(x) \Sigma^{ab} \psi(x)$$

wobei Σ^{ab} die jeweiligen Darstellungsmatrizen der Erzeugenden der Lorentzgruppe sind und Θ_{ab} infinitesimale Parameter:

$$L_a^\epsilon(x) = \delta_a^\epsilon + \Theta_a^\epsilon, \quad \Theta_a^\epsilon = -\Theta_\epsilon^a$$

dann transformiert sich wegen der Ortsabhängigkeit von Θ_{ab} bereits $\partial_\mu \psi$ nicht homogen:

$$\delta(\partial_\mu \psi) = \frac{i}{2} \Theta_{ab}(x) \Sigma^{ab} \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} (\partial_\mu \Theta_{ab}(x)) \Sigma^{ab} \psi \quad (12)$$

Um diesen Defekt zu beheben, konstruiert man - nach der von Yang und Mills³⁹ entwickelten Methode der Eichfelder - eine kovariante Ableitung D_μ derart, daß

$$D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}) \psi \quad (13)$$

ein kovarianter Weltvektor ist und sich unter lokalen Lorentztransformationen homogen transformiert. Das Eichfeld $\omega_{\mu ab}$ muß dann natürlich ein Weltvektor sein, und es ist auch leicht zu sehen, daß es sich unter lokalen Lorentztransformationen gemäß

$$\omega'_{\mu ab}(x) = L_a^{a'}(x) L_b^{b'} \omega_{\mu a' b'}(x) - \partial_\mu \Theta_{ab}(x) \quad (14)$$

transformieren muß, wenn $D_\mu \psi$ sich nach

$$\delta(D_\mu \psi) = \frac{i}{2} \Theta_{ab} \Sigma^{ab} D_\mu \psi \quad (15)$$

transformieren soll. M.a.W. $\omega_{\mu ab}$ darf sich nicht wie ein Lorentztensor transformieren, wenn sich $D_\mu \psi$ homogen transformieren soll. Dieses Verhalten ist typisch für Eichfelder und befindet sich in vollkommener Analogie zu dem der durch die Christoffelsymbole gegebenen Zusammenhangskoeffizienten

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (16)$$

Auch $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ läßt sich als Eichfeld interpretieren und ist ebensowenig ein kovarianter Tensor, wie $\omega_{\mu ab}$ einen Lorentztensor darstellt. Der Unterschied zwischen beiden Größen ist die zugrundeliegende Eichgruppe: das eine Mal ist es die Gruppe der allgemeinen Koordinatentransformationen, das andere die homogene Lorentzgruppe.

Ähnlich wie sich $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ aus dem metrischen Tensor und dessen ersten Ableitungen aufbaut, kann man auch $\omega_{\mu ab}$ aus dem Vierbeinfeld und dessen ersten Ableitungen

gen konstruieren. Zunächst stellt man fest, daß $-(\partial_\mu e_a^\mu) e_{b\nu}$ das geforderte Transformationsverhalten (14) besitzt, doch stellt dieser Ausdruck keinen Weltvektor dar, da er die gewöhnliche Ableitung enthält. Ersetzt man letztere jedoch durch die aus der $g_{\mu\nu}$ -Theorie bekannte kovariante Ableitung und definiert

$$\omega_{\mu ab} = -(\partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu e_a^\sigma) e_{b\nu} \quad (17)$$

mit den Christoffelsymbolen (16), so gelangt man zu einem Objekt, das sowohl bezüglich allgemeiner Koordinatentransformationen als auch bezüglich lokaler Lorentztransformationen das geforderte Transformationsverhalten aufweist. Drückt man in (17) die $g_{\mu\nu}$ durch $e_{a\mu} e^a_\nu$ aus, so läßt sich $\omega_{\mu ab}$ schließlich in der Form

$$\omega_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_\mu^c (\Omega_{ac} + \Omega_{ca} - \Omega_{ca}) \quad (18)$$

schreiben mit

$$\Omega_{ca} = e_{c\nu} (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) \quad (19)$$

Wir sind nunmehr imstande, ein beliebiges, lorentzinvariantes Wirkungsintegral mit Hilfe des Vierbeinformalismus auf allgemein kovariante Form zu bringen. Nach dem oben Gesagten brauchen wir nur sämtliche Felder als Weltskalare zu betrachten, die Ableitungen ∂_μ durch $e_a^\mu D_\mu$ zu ersetzen und den Integranden mit $e = \det e_a^\mu$ zu multiplizieren, um aus ihm eine skalare Dichte zu machen.

Nach dieser Regel lautet z.B. das Wirkungsfunktional eines massiven Spin1/2-Teilchens:

$$A(\psi) = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (20a)$$

in allgemein kovarianter Form:

$$A(\psi, e) = \int d^4x e \bar{\psi} [i\gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + i\Gamma_\mu) - m] \psi \quad (20b)$$

wobei wir die sog. Fock-Ivanenko-Koeffizienten ⁴²

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \quad \text{mit} \quad \Sigma^{ab} = \frac{1}{4i} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (21)$$

eingeführt haben.

Wir betrachten jetzt die Änderung eines beliebigen kovariantisierten Wirkungs-
funktionalis

$$A(\psi, e) = \int d^4x e L(\psi, e)$$

bei einer infinitesimalen Änderung von $e_\mu^a(x)$. Sie kann geschrieben werden
als ⁴³

$$\delta_e A(\psi, e) = \int d^4x e \delta e_\mu^a T^\mu_a \quad (22)$$

Diese Gleichung ist zunächst eine Definitionsgleichung für die Größe T^μ_a .
Bedeutet δe_μ^a z.B. die Änderung von e_μ^a bei einer infinitesimalen Lorentz-
transformation:

$$\delta e_\mu^a = \theta_b^a e_\mu^b$$

so fordert die Invarianz von A, daß der Lorentztensor

$$T^{ab} = e_\mu^a T^\mu_b$$

symmetrisch in seinen Indizes ist:

$$T^{ab} = T^{ba}$$

und somit auch der Welttensor

$$T^{\mu\nu} = e^{\mu a} e^{\nu b} T_{ab}$$

Daß letzterer für Tensorfelder ψ identisch ist mit dem durch

$$\delta_g A(\psi, g) = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (22')$$

definierten EIT (vgl. Gl.(14) aus § 1.1), erkennt man folgendermaßen: Zunächst
läßt sich anstelle von (22) auch schreiben

$$\delta_e A(\psi, e) = \int d^4x e \delta e_\mu^a e_{a\nu} T^{\mu\nu}$$

und wegen der Symmetrie von $T^{\mu\nu}$ schließlich

$$\delta_e A(\psi, e) = \int d^4x e \frac{1}{2} (\delta e_\mu^a e_{a\nu} + e_\mu^a \delta e_{a\nu}) T^{\mu\nu}$$

Für Wirkungsfunctionale $A(\psi, e)$, die nur über den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_{a\nu}$
von den Vierbeinfeldern abhängen, ist dies aber gleichbedeutend mit

$$\delta_e A(\psi, e) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \delta_g A(\psi, g) \quad \text{q.e.d.}$$

Die Variation eines Wirkungsfunctionals $A(\psi, e)$ nach e^a und anschließender
Übergang zur Minkowski-Metrik liefert wieder den symmetrischen Belinfante-
Tensor. Im Falle der Dirac-Wirkung (20a,b) erhält man auf diese Weise:

$$T_{\mu\nu}(\psi) = \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi] + \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi] = \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi + \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi]$$

Die Lagrangedichte für das Vierbeinfeld selbst, das bisher nur als äußeres Feld betrachtet wurde, ist festgelegt durch die Forderung, daß sie sowohl unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie unter lokalen Lorentztransformationen invariant sein muß, und daß die Feldgleichungen Ableitungen von e^a_{μ} höchstens zweiter Ordnung enthalten sollen. Nach Cartan³⁴ gibt es genau einen Skalar $R(e)$, der aus dem Vierbeinfeld e^a_{μ} sowie seinen ersten und zweiten Ableitungen konstruiert werden kann, letztere aber nur linear enthält. Ähnlich wie in der $g_{\mu\nu}$ -Theorie, erhält man ihn aus dem durch den Kommutator

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] \psi = -\frac{i}{2} R_{\alpha\beta, \mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \psi \quad (24)$$

definierten Krümmungstensor

$$R_{\alpha\beta, \mu\nu} = \partial_{\mu} \omega_{\nu\alpha\beta} - \partial_{\nu} \omega_{\mu\alpha\beta} + \omega_{\mu\alpha\epsilon} \omega_{\nu}{}^{\epsilon}{}_{\beta} - \omega_{\nu\alpha\epsilon} \omega_{\mu}{}^{\epsilon}{}_{\beta} \quad (25)$$

Durch Kontraktion mit $e^{b\nu}$ gewinnt man hieraus zunächst den Ricci-Tensor:

$$R_{\alpha\mu} = e^{b\nu} R_{\alpha\beta, \mu\nu} \quad (26)$$

und durch nochmalige Kontraktion mit $e^{a\mu}$ den Skalar

$$R(e) = e^{a\mu} R_{\alpha\mu} = e^{a\mu} e^{b\nu} R_{\mu\nu, \alpha\beta} \quad (27)$$

Die durch

$$\mathcal{L}_G(e) = \frac{1}{2\kappa_g^2} e e^{a\mu} e^{b\nu} R_{\mu\nu, \alpha\beta} \quad (28)$$

definierte Lagrangedichte erfüllt dann offensichtlich die gestellten Forderungen und stimmt darüberhinaus mit jener überein, die man aus der Einsteinschen Lagrangedichte des Gravitationsfeldes erhält, wenn man dort den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ durch die Vierbeinfelder ausdrückt.

Die Feldgleichungen, die sich aus dem vollständigen Wirkungsfunktional

$$A = \int d^4x \mathcal{L}_G(e) + \int d^4x \mathcal{L}(\psi, e) \quad (29)$$

nach dem Vierbeinfeld e^a_{μ} ergeben, lauten:

$$R_{\alpha\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{\alpha\mu} R(e) = -\kappa_g^2 T_{\alpha\mu} \quad (30)$$

wobei $T_{\alpha\mu}$ der durch Gl.(22) definierte EIT ist.

1.3 Lorentzinvariante Gravitationstheorie

Die Art der Ableitung der ART fällt aus dem Rahmen der allgemeinen Feldtheorie insofern heraus, als sie im wesentlichen auf geometrischen Betrachtungen beruht. Es ist daher von verschiedenen Autoren⁴⁴⁻⁴⁶ der Versuch unternommen worden, ausgehend vom Formalismus der relativistischen Feldtheorie eine relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie zu entwickeln.

Die Gesichtspunkte, von denen man sich bei der Aufstellung einer lorentzinvarianten Gravitationstheorie - etwa nach dem Muster der Elektrodynamik - leiten läßt, sind im wesentlichen folgende:

1. Die Theorie muß als Grenzfall die Newtonsche Gravitationstheorie enthalten, da diese einen großen Teil der Gravitationsphänomene richtig zu beschreiben vermag. Dies bedeutet, daß das Gravitationsfeld als neutrales Feld zu behandeln ist und zur Ruhemasse Null gehört.
2. Die weitgehende Gültigkeit der Newtonschen Gravitationstheorie deutet ferner darauf hin, daß die Masse die Quelle des Gravitationsfeldes ist. Im Rahmen einer lorentzinvarianten Theorie stehen einem hierfür zwei Größen zur Verfügung: der symmetrische Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ der Materie (d.h. der durch Gl. (15) aus § 1.1 gegebene Belinfante Tensor) und dessen Spur $T^\lambda{}_\lambda$. Koppelt man das Gravitationsfeld direkt an diese Größen, so lauten also die möglichen Wechselwirkungen $h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ und $\varphi T^\lambda{}_\lambda$, wobei man sich wegen der Symmetrie von $T_{\mu\nu}$ auf ein symmetrisches Tensorfeld $h_{\mu\nu}$ beschränken kann. Die Kopplung $\varphi T^\lambda{}_\lambda$ allein gäbe keine Lichtablenkung an der Sonne, da im Fall des elektromagnetischen Feldes $T^\lambda{}_\lambda$ verschwindet. Diese Tatsache schließt aber die Kopplung nicht aus, denn sie besagt lediglich, daß die Kopplung $h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ auf jeden Fall auftreten muß. Wenn man sich trotzdem gegen die Kopplung $\varphi T^\lambda{}_\lambda$ entscheidet, so geschieht dies aus Einfachheitsgründen, da man natürlich versuchen wird, mit einer einzigen Kopplung auszukommen.

Auf den allgemeinen Fall, d.h. das gleichzeitige Auftreten von Skalar- und Tensorkopplung, kommen wir später noch zurück.

3. Der dritte Gesichtspunkt, der für die Konstruktion einer lorentzinvarianten Gravitationstheorie entscheidend ist, ist das Auftreten einer Eichgruppe, die auf die Annahme zurückzuführen ist, daß die Ruhemasse des Gravitationsfeldes exakt gleich Null ist.

Das Tensorfeld $h_{\mu\nu}$, durch das also das Gravitationsfeld zu beschreiben ist, transformiert sich nach der reduziblen Darstellung

$$D = (0,0) \oplus (0,0) \oplus (0,1) \oplus (0,2)$$

der inhomogenen Lorentzgruppe $P_+^\dagger$. Die zu $h_{\mu\nu}$ gehörende Eichgruppe besteht aus den Transformationen

$$T(\Lambda) h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \quad (1)$$

Sie entsprechen dem Transformationsgesetz des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ bei einer infinitesimalen Koordinatentransformation:

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \Lambda_\mu$$

Die Forderung, daß die Bewegungsgleichung des freien Gravitationsfeldes linear in den zweiten Ableitungen des Feldes sein soll und invariant unter der Eich-Transformation (1) sein soll, führt in eindeutiger Weise auf die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2} (h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\nu,\lambda} - 2 h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\lambda,\nu} + 2 h_{\mu\lambda}{}^{\mu\lambda} h_{\nu}{}^{\nu,\lambda} - h_{\mu}{}^{\mu,\lambda} h_{\nu,\lambda}{}^{\nu}) \\ &= \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} h_{\varrho\sigma\tau} \end{aligned} \quad (2)$$

mit

$$H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} = \eta^{\mu\varrho} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\lambda\tau} - 2 \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\lambda\varrho} + \eta^{\nu\lambda} \eta^{\mu\tau} \eta^{\varrho\sigma} + \eta^{\nu\mu} \eta^{\varrho\tau} \eta^{\lambda\sigma} + \eta^{\mu\nu} \eta^{\varrho\sigma} \eta^{\lambda\tau} \quad (3)$$

Es besteht hier jedoch ein wesentlicher Unterschied zur Elektrodynamik: Während die Lagrangefunktion und der EIT des freien Photonfeldes manifest

eichinvariant sind, ändert sich die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_0(h_{\mu\nu})$ des freien Gravitationsfeldes bei der Eichtransformation (1) um eine Divergenz, so daß auch der zugehörige EIT nicht eichinvariant ist. Die Gesamtenergie schließlich ist nur positiv, wenn man sich auf die sog. Hilbert-Eichung beschränkt, von der später noch die Rede sein wird.

Steht das Gravitationsfeld in Wechselwirkung mit irgendwelchen Materiefeldern ψ , so ist die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_0(h_{\mu\nu})$ des freien Gravitationsfeldes zu ergänzen durch einen Wechselwirkungsterm, der nach dem unter Punkt 2. Gesagten gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{int}(h_{\mu\nu}) = \kappa_g h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\psi) \quad (4)$$

wobei $T_{\mu\nu}(\psi)$ den Belinfante-Tensor der Materie darstellt.

Die Variation der vollen Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{int}(h_{\mu\nu}) \quad (5)$$

nach $h_{\mu\nu}$ führt dann auf die Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu}(h) = \kappa_g T_{\mu\nu}(\psi) \quad (6)$$

wobei $G_{\mu\nu}(h)$ den linearisierten Einstein-Tensor

$$G_{\mu\nu}(h) = \square h_{\mu\nu} - h_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - h_{\nu\lambda,\mu}^{\lambda} + h_{\lambda,\mu\nu}^{\lambda} + \eta_{\mu\nu}(h^{\kappa\lambda}_{,\kappa\lambda} - \square h^{\lambda}_{\lambda}) \quad (7)$$

bedeutet.

Da die Divergenz von $G_{\mu\nu}(h)$ identisch verschwindet:

$$G_{\mu\nu}(h)^{,\nu} = 0 \quad (8)$$

muß $T_{\mu\nu}(\psi)$ ebenfalls divergenzfrei sein:

$$T_{\mu\nu}(\psi)^{,\nu} = 0 \quad (9)$$

An dieser Stelle nun zeigt sich, daß die lineare Gravitationstheorie inkonsistent ist. Denn das Noether-Theorem liefert einen Erhaltungssatz nur für den mit der gesamten Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{int}(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_0(\psi) \quad (10)$$

gebildeten EIT. Man überzeugt sich, daß die Divergenz des mit $\mathcal{L}_0(\psi)$ gebildeten Belinfante-Tensors $T_{\mu\nu}(\psi)$ im Fall der Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld nicht gleich Null ist, sondern nur klein von der Größenordnung der Gravitationskonstanten κ_g . D.h. die Annahme, daß $\mathcal{L}_{\text{int}}(h_{\mu\nu})$ allein durch den Kopplungsterm (4) gegeben sei, führt zu einer Theorie, die in höheren Ordnungen der Gravitationskonstanten inkonsistent ist. Diese Inkonsistenz kann um eine Potenz in κ_g gemildert werden, wenn man den Belinfante-Tensor $T_{\mu\nu}(\psi)$ der Materie durch den Gravitationsanteil $T_{\mu\nu}(h)$ zu

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\psi) + T_{\mu\nu}(h)$$

ergänzt. Hierdurch werden die Feldgleichungen (6) der Gravitation jedoch nicht-linear, da $T_{\mu\nu}(h)$ quadratisch in den Ableitungen des Gravitationsfeldes ist. Dem Hinzufügen von $T_{\mu\nu}(h)$ zu $T_{\mu\nu}(\psi)$ auf der rechten Seite der Feldgleichungen (6) ist natürlich durch eine Ergänzung der Lagrange-funktion $\mathcal{L}_0(h_{\mu\nu})$ Rechnung zu tragen. Der modifizierten Lagrange-funktion des Gravitationsfeldes:

$$\mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}'(h_{\mu\nu})$$

entspricht dann ein neuer EIT der Gravitation. Wiederholt man mit diesem EIT das oben beschriebene Verfahren, so gelangt man durch Iteration zu einer immer konsistenter werdenden Theorie und erhält schließlich - nach unendlich vielen Iterationsschritten - die Einsteinschen Gleichungen. Eine weitaus elegantere, d.h. mathematisch durchsichtigere Methode, um von der linearen Gravitationstheorie zu einer exakten Theorie zu gelangen, besteht darin, vom Postulat der Eichinvarianz in allen Ordnungen der Gravitationskonstanten auszugehen. Dieser Weg ist von Wyss⁴⁶ eingeschlagen worden, soll aber hier nicht näher erläutert werden.

Wir kehren stattdessen noch einmal zu den Feldgleichungen (6) zurück, die invariant sind gegen die Eichtransformation (1):

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu}$$

Diese Freiheit gestattet es, die oben erwähnte Hilbert-Eichung zu erfüllen, nämlich

$$(\hat{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \hat{h}^{\lambda}_{\lambda})^{;\mu} = 0 \quad (11)$$

wodurch die Klasse der Eichfunktionen Λ_μ auf solche mit

$$\square \Lambda_\mu = \Lambda_{\mu,\nu}{}^{\nu} = 0$$

eingeschränkt wird. Bei Benutzung dieser Eichung reduzieren sich die Feldgleichungen (6) auf

$$\square (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda) = \kappa_2 T_{\mu\nu}(\psi) \quad (12)$$

Führt man das Feld

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda \quad (13)$$

ein, so kann man für (12) und (11) offenbar auch schreiben

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = \kappa_2 T_{\mu\nu}(\psi) \quad (14)$$

und

$$\tilde{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu\mu} = 0 \quad (15)$$

Die letzten beiden Beziehungen besagen, daß in der Hilbert-Eichung der Vektoranteil und einer der beiden Spin0-Anteile des wechselwirkenden Gravitationsfeldes $h_{\mu\nu}$ verschwinden. Im wechselwirkungsfreien Fall verschwindet sogar $\tilde{h}^\lambda{}_\lambda = -h^\lambda{}_\lambda$, d.h. auch der zweite Spin0-Anteil des Gravitationsfeldes. In der Hilbert-Eichung transformiert sich also das freie Gravitationsfeld irreduzibel, und zwar nach der Darstellung (0,2) der inhomogenen Lorentzgruppe $P_+^\dagger$.

Das Verhalten eines masselosen Tensorfeldes unterscheidet sich grundlegend von dem eines massiven Tensorfeldes. Für die Bewegungsgleichung des ersten existieren Klassen physikalisch äquivalenter Lösungen, die durch Eichtransformation auseinander hervorgehen. Die Bewegungsgleichung eines massiven Tensorfeldes dagegen ist nicht mehr eichinvariant und daher wesentlich restriktiver. Die Lagrangefunktion eines massiven, symmetrischen Tensorfeldes ist nach Fierz^{47,48} gegeben durch

$$\mathcal{L}_0(\psi_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \psi_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda,\rho\sigma\tau} \psi_{\rho\sigma,\tau} - \frac{1}{2} m^2 (\psi_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu} - \psi_\mu{}^\mu \psi_\nu{}^\nu) \quad (16)$$

[†]) Wir verwenden hier für das eichtransformierte Feld $\hat{h}_{\mu\nu}$ dasselbe Symbol wie für das ursprüngliche!

und die Bewegungsgleichung lautet:

$$G_{\mu\nu}(\psi) - m^2(\psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\psi^\lambda{}_\lambda) = 0 \quad (17)$$

wobei $G_{\mu\nu}(\psi)$ analog zu $G_{\mu\nu}(h)$ definiert ist. Wegen

$$G_{\mu\nu}(\psi)^{;\nu} = 0 \quad (18)$$

folgt hieraus für $m^2 \neq 0$ unmittelbar die Divergenzgleichung

$$(\psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\psi^\lambda{}_\lambda)^{;\nu} = 0 \quad (19)$$

Bei Beachtung dieser Beziehung liefert die Spurbildung von (17) dann zusätzlich

$$\psi^\lambda{}_\lambda = 0 \quad (20)$$

und somit

$$\psi_{\mu\nu}^{;\nu} = \psi_{\mu\nu}{}^{;\nu\mu} = 0 \quad (21)$$

d.h. $\psi_{\mu\nu}$ ist ein reines Spin2-Feld.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß die ART die oben dargestellte lorentzinvariante Gravitationstheorie bereits enthält. Denn geht man in

$$\mathcal{L}_G(g) = \frac{1}{2\kappa_g^2} \sqrt{-g} R(g) \quad (22a)$$

bzw.

$$\mathcal{L}_G(e) = \frac{1}{2\kappa_g^2} e R(e) \quad (22b)$$

zur sog. Näherung schwacher Felder über und setzt

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2\kappa_g h_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad |2\kappa_g h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (23a)$$

bzw.

$$e_{\mu a}(x) = \delta_{\mu a} - \kappa_g h_{\mu a} \quad \text{mit} \quad |\kappa_g h_{\mu a}| \ll 1 \quad (23b)$$

so gehen die Lagrangedichten (22a) und (22b) in nullter Ordnung der Gravitationskonstanten κ_g in die Lagrangefunktion (2) über, während die allgemein kovariante Lagrangedichte $\sqrt{-g} L_M(\psi, g_{\mu\nu})$ der Materie in erster Ordnung von κ_g in

$$\mathcal{L}_0(\psi) + \kappa_g h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\psi)$$

übergeht. D.h. die lineare, lorentzinvariante Gravitationstheorie ist nichts anderes als die lineare Näherung der ART.

§2. Theorie der Gravitation mit Skalar-Tensor-Mischung

Wir geben jetzt einen kurzen Abriss der von der Allgemeinen Relativitätstheorie abweichenden Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung. Sie steht, wie sich im nächsten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wird, in ziemlich engem Zusammenhang mit dem für das folgende entscheidenden Begriff der Weyl-Invarianz und wird auch bei der Einbeziehung der SMD in die Ramansche Lagrangetheorie der TMD eine gewisse Rolle spielen. Es ist nicht unsere Absicht, auf Details dieser Theorie einzugehen, insbesondere auch nicht auf ihre Lösungen oder die - teilweise sehr verschiedenen - Motive, die zu ihr geführt haben. Die damit zusammenhängenden Fragen sind an anderer Stelle in der Literatur ausführlich diskutiert worden. 27, 28, 49-51

2.1 Allgemein kovariante Theorie

Charakteristisch für Gravitationstheorien mit Skalar-Tensor-Mischung ist die Auffassung, daß zur vollständigen Beschreibung des Gravitationsfeldes neben dem metrischen Tensor eines Riemannschen Raumes noch ein zusätzliches Skalarfeld notwendig ist. Diese Auffassung wird nach Brans und Dicke ⁵⁰ nahegelegt durch das Machsche Prinzip, nach dem Trägheitskräfte auf die Relativbewegung gegenüber der im Weltall vorhandenen Materie zurückzuführen sind. Die Einführung eines zusätzlichen Skalarfeldes in eine Theorie der Gravitation bedeutet die Brechung des starken Äquivalenzprinzips, da in diesem Fall das Gravitationsfeld nicht mehr allein durch den metrischen Tensor repräsentiert wird. Dagegen bleibt in den meisten Gravitationstheorien mit Skalar-Tensor-Mischung das schwache Äquivalenzprinzip unangetastet, da in ihnen die kovariante Divergenz des EIT der Materie verschwindet und somit in jedem lokal flachen System der Energie-Impuls-Erhaltungssatz der speziellen Relativitätstheorie gilt. Voraussetzung dafür ist, daß das skalare Gravitationsfeld nicht in direkter Wechselwirkung mit den Materiefeldern steht.

Die Einbeziehung des skalaren Gravitationsfeldes in die Theorie geschieht nun dadurch, daß die Einsteinsche Lagrangedichte der mit der Materie wechselwirkenden Gravitation durch eine geeignete Skalar-Tensor-Lagrangedichte ersetzt wird. P. G. Bergmann⁵² hat gezeigt, daß jede Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung, die sich aus einem Variationsprinzip ableiten läßt und als Feldgleichungen Differentialgleichungen nicht höherer als zweiter Ordnung liefert, durch eine Lagrangedichte gekennzeichnet ist, die folgende allgemeine Struktur besitzt:

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}^G + \bar{\mathcal{L}}^M$$

mit dem reinen Gravitationsanteil

$$\bar{\mathcal{L}}^G = \sqrt{-g} \bar{\mathcal{L}}^G = \sqrt{-g} \left\{ R(g) f_1(\varphi) + \frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} f_2(\varphi) + f_3(\varphi) \right\} \quad (1)$$

und der Materie-Lagrangedichte

$$\bar{\mathcal{L}}^M = \sqrt{-g} \bar{\mathcal{L}}^M(g_{\mu\nu}, \varphi; \psi) \quad (2)$$

die zusammenfassend steht für die allgemein kovariante Lagrangedichte der durch ψ gekennzeichneten Materiefelder, die möglicherweise auch mit dem skalaren Gravitationsfeld φ wechselwirken. Die Größen f_1 , f_2 und f_3 sind beliebige skalare Funktionen des φ -Feldes.

Die von Brans und Dicke gestellte Forderung, daß in einer Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung das schwache Äquivalenzprinzip nicht angetastet werden sollte, bedingt - wie oben bereits festgestellt -, daß die Lagrangedichte $\bar{\mathcal{L}}^M$ der Materie nicht von φ abhängen darf. Die Struktur der Funktionen f_1 , f_2 und f_3 bleibt bei dieser Forderung weiterhin frei. Die Theorie von Brans und Dicke ist dadurch ausgezeichnet, daß das skalare Gravitationsfeld nicht nur nicht mit der Materie sondern auch nicht mit sich selbst wechselwirkt, daß also

$$f_3(\varphi) = 0 \quad (3)$$

ist. Die Funktionen f_1 und f_2 sind bei Brans und Dicke durch

$$f_1(\varphi) = \frac{1}{8\omega} \varphi^2 \text{ und } f_2(\varphi) = 1^{(+)} \quad (4a,b)$$

(+) Wir haben das von Brans - Dicke eingeführte Skalarfeld Φ durch $\varphi^2 = (\omega/2\pi)\Phi$ substituiert.

fixiert, wobei $\omega > 0$ ein dem Experiment anzupassender, dimensionsloser Parameter ist. In dieser Theorie tritt also an die Stelle der Gravitationskonstanten die Variable $(\varphi^2/8\omega)^{-1}$.

Unter den möglichen Versionen von Gravitationstheorien mit Skalar-Tensor-Mischung wollen wir uns hier auf die von Brans - Dicke beschränken, da man sämtliche bisher bekannten Versionen durch geeignete Feldtransformationen ineinander überführen kann.⁵³ Eine mögliche Abhängigkeit der Materie-Lagrangedichte $\bar{\mathcal{L}}^M$ vom skalaren Gravitationsfeld φ wollen wir zunächst nicht ausschließen, um deren Einfluß auf die Verletzung des schwachen Äquivalenzprinzips direkt verfolgen zu können. Mit den durch (3) und (4) gegebenen Funktionen f_1 , f_2 und f_3 nimmt dann die Lagrangedichte, die wir im folgenden betrachten wollen, die Form

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{\varphi^2}{8\omega} R(g) + \frac{1}{2} \varphi_{, \lambda} \varphi^{, \lambda} \right\} + \sqrt{-g} \bar{\mathcal{L}}^M(g_{\mu\nu}, \varphi; \psi) \quad (5)$$

an. Die zugehörigen Euler-Gleichungen, denen $g_{\mu\nu}$ und φ gehorchen, sind gegeben durch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \frac{4\omega}{\varphi^2} \{ T_{\mu\nu}(\psi) + T_{\mu\nu}(\varphi) \} \quad (6)$$

und

$$\square \varphi = \frac{1}{4\omega} R \varphi + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^M}{\partial \varphi} \quad (7)$$

Dabei stellt $T_{\mu\nu}(\psi)$ den EIT der Materie dar:

$$T_{\mu\nu}(\psi) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \bar{\mathcal{L}}^M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (8)$$

und $T_{\mu\nu}(\varphi)$ den des φ -Feldes:

$$T_{\mu\nu}(\varphi) = (\varphi_{, \mu} \varphi_{, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi_{, \lambda} \varphi^{, \lambda}) + \frac{1}{4\omega} (D_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square) \varphi^2 \quad (9)$$

mit

$$D_{\mu\nu} \varphi^2 \equiv \varphi^2_{, \nu; \mu} \quad \text{und} \quad \square \varphi^2 \equiv \varphi^2_{, \lambda}{}^{, \lambda}$$

Die skalare Feldgleichung läßt sich bei Verwendung der durch die Spurbildung von (6) entstehenden Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\square \varphi^2 = \frac{4\omega}{2\omega + 3} \{ T^\lambda{}_\lambda(\psi) + \varphi \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^M}{\partial \varphi} \} \quad (10)$$

Hängt $\bar{L}^M$ nicht von φ ab, so geht (10) in Übereinstimmung mit der Theorie von Brans und Dicke über in

$$\square \varphi^2 = \frac{4\omega}{2\omega+3} T^\lambda_\lambda(\psi) \quad (11)$$

Nach Gleichung (6) trägt auch das Skalarfeld φ zur Quelle des metrischen Feldes $g_{\mu\nu}$ bei. Koppelt φ an die Materie, so ist die kovariante Divergenz von $T_{\mu\nu}(\psi)$ von Null verschieden und man erhält

$$T_{\mu\nu}(\psi)^{;\mu} = \varphi_{;\nu} \frac{\partial \bar{L}^M}{\partial \varphi} \quad (12)$$

Wechselwirkt φ dagegen nicht mit der Materie, so ist $T_{\mu\nu}(\psi)$ kovariant erhalten

$$T_{\mu\nu}(\psi)^{;\mu} = 0 \quad (13)$$

und damit das schwache Äquivalenzprinzip gültig.

Im Rahmen von Skalar-Tensor-Theorien der Gravitation, die dem schwachen Äquivalenzprinzip genügen, ist es möglich, einen divergenzfreien Energie-Impuls-Komplex zu definieren, mit dessen Hilfe sich ein erhaltener Impulsvektor konstruieren läßt. Ein solcher Energie-Impuls-Komplex, der das Analogon des aus der ART bekannten Energie-Impuls-Komplexes darstellt, ist kürzlich von H. B. Hart ⁵⁴ in einer Arbeit über Erhaltungssätze und Symmetrieeigenschaften von Gravitationstheorien mit Skalar-Tensor-Mischung angegeben worden. Er läßt sich ebenfalls durch ein Superpotential ausdrücken und ist gegeben durch

$$\bar{\Theta}^\mu_\nu = \bar{U}^{[\mu\alpha]}_{;\alpha} \quad (14)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{U}^{[\mu\alpha]}_{;\alpha} = & (-g)^{-1/2} g_{\nu\beta} [f_1 g(g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\lambda} g^{\mu\beta})]_{;\lambda} \\ & + (-g)^{-1/2} f_{1,\lambda} [g^{\alpha\lambda} g^{\mu\beta} - g^{\mu\lambda} g^{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (15)$$

Für $f_1 = \text{const.} = \kappa_g^{-2}$ geht dieser Ausdruck offensichtlich in das von Freudsche Superpotential (29) aus Kap. I, §1.1 über.

2.2 Lorentzinvariante Theorie ⁺)

Um zur linearen Version der Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung zu gelangen, gehen wir in der oben betrachteten Lagrange-funktion

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{\varphi^2}{8\omega} R(g) + \frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} \right\} + \sqrt{-g} L^M(g_{\mu\nu}; \psi) \quad (1)$$

zum Grenzfall schwacher Felder über. D.h. wir setzen

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \xi(x) \quad (2)$$

wobei φ_0 den Beitrag ferner Galaxien zur Gravitationskonstanten darstellt und $\xi(x)$ die lokale Abweichung davon bezeichnet. Ähnlich wie in der ART setzen wir ferner

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2 \bar{\kappa}_g \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3)$$

mit

$$\bar{\kappa}_g^2 = \alpha^2 / \varphi_0^2 \equiv 4\omega / \varphi_0^2 \quad (4)$$

Entwickelt man nach $\bar{\kappa}_g$ und ξ , so erhält man für $\bar{\mathcal{L}}$ in niederster Ordnung:

$$\bar{\mathcal{L}}_g = \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varphi\varphi\varphi} \bar{h}_{\varphi\varphi\varphi} + \frac{1}{2} \xi_{,\lambda} \xi^{,\lambda} - \frac{2}{\alpha} \xi_{,\lambda} (\bar{h}_\mu^{\mu,\lambda} - \bar{h}_\mu^{\lambda,\mu}) + \bar{\kappa}_g \bar{h}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\psi) \quad (5)$$

Die zugehörigen Feldgleichungen, die den Gleichungen (6) und (7) aus Kap. I., § 2.1 entsprechen, lauten:

$$G_{\mu\nu}(\bar{h}) + \frac{2}{\alpha} (\eta_{\mu\nu} \square \xi - \xi_{,\mu\nu}) = \bar{\kappa}_g T_{\mu\nu}(\psi) \quad (6)$$

und

$$\square \xi = -\frac{2}{\alpha} (\square \bar{h}_\lambda^\lambda - \bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu\nu}) \quad (7)$$

⁺) Wir stützen uns hier im wesentlichen auf einen Artikel von R. U. Sexl⁵¹ in dem besonders solche Gravitationstheorien behandelt werden, die nur dem schwachen Äquivalenzprinzip genügen.

⁺⁺) Die Materie-Lagrangedichte $\sqrt{-g} \bar{L}^M$ darf hier wegen des Äquivalenzprinzips nicht mehr von φ abhängen.

Dabei bedeutet $G_{\mu\nu}(h)$ wieder den linearisierten Einstein-Tensor:

$$G_{\mu\nu}(\bar{h}) = \square \bar{h}_{\mu\nu} - \bar{h}_{\mu\lambda, \nu}{}^{,\lambda} - \bar{h}_{\nu\lambda, \mu}{}^{,\lambda} + \bar{h}_{\lambda, \mu\nu}{}^{,\lambda} + \gamma_{\mu\nu} (\bar{h}{}^{\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda} - \square \bar{h}_{\lambda}{}^{\lambda}) \quad (8)$$

mit identisch verschwindender Divergenz:

$$G_{\mu\nu}(\bar{h}){}^{,\mu} \equiv 0 \quad (9)$$

Die Spurbildung von (6) und Vergleich mit (7) liefert

$$\square \xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 6} \bar{\kappa}_g T_{\lambda}{}^{\lambda}(\psi) \quad (10)$$

in Analogie zu Gleichung (11) aus Kap. I, §2.1. Bei Verwendung der Koordinatenbedingungen

$$(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \bar{h}_{\lambda}{}^{\lambda}){}^{,\mu} = -\frac{1}{\alpha} \xi_{,\nu} \quad (11)$$

vereinfacht sich die Feldgleichung für $\bar{h}_{\mu\nu}$ zunächst zu

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} \bar{h}_{\kappa\lambda}{}^{,\kappa\lambda} = \bar{\kappa}_g T_{\mu\nu}(\psi) \quad (12)$$

Nochmalige Benutzung der Koordinatenbedingung (11) führt dann in Verbindung mit (10) auf die Proportionalitätsbeziehung:

$$\xi(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2} \bar{h}_{\lambda}{}^{\lambda}(x) \quad (13)$$

so daß sich - wiederum aufgrund von (11) - für Gleichung (12) auch schreiben läßt

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \square \bar{h}_{\lambda}{}^{\lambda} \frac{\alpha^2 + 4}{\alpha^2 + 2} = \bar{\kappa}_g T_{\mu\nu}(\psi) \quad (14)$$

Das Skalarfeld $\xi(x)$ erscheint jetzt überhaupt nicht mehr in der Theorie - mit Hilfe der Bedingung (11) wurde es aus ihr eliminiert.

Die hier dargestellte, lineare Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung geht, wie wir gesehen haben, aus der nicht-linearen Theorie durch Übergang zu schwachen Feldern hervor. Ihr physikalischer Inhalt kann jedoch auf eine andere Art und Weise formuliert werden, die der ersten zwar äquivalent ist, weil sie durch Umdefinition der Felder auf

diese zurückgeführt werden kann, aber den Vorzug besitzt, sich besser in die feldtheoretischen Begriffe der Elementarteilchen einzufügen. Aus diesem Grund sei auch sie hier kurz skizziert.

Sie basiert auf der in § 1.3 dieses Kapitels erläuterten Tatsache, daß das Gravitationsfeld prinzipiell durch die Überlagerung eines masselosen Tensorfeldes und eines masselosen Skalarfeldes beschrieben werden kann. Bedeuten also $\tilde{h}_{\mu\nu}$ und ξ das tensorielle bzw. skalare Gravitationsfeld, so ist die Lagrangedichte der mit der Materie wechselwirkenden Gravitation in ihrer allgemeinsten Form gegeben durch

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_0(\tilde{h}_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_0(\xi) + \mathcal{L}_{int}(\tilde{h}_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{int}(\xi) \quad (15)$$

wobei $\mathcal{L}_0(\tilde{h}_{\mu\nu})$ und $\mathcal{L}_0(\xi)$ die Lagrangedichten der freien Gravitationsfelder $\tilde{h}_{\mu\nu}$ und ξ bedeuten:

$$\mathcal{L}_0(\tilde{h}_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \tilde{h}_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda,\sigma\sigma\tau} \tilde{h}_{\sigma\tau} \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_0(\xi) = \frac{1}{2} \xi_{,\lambda} \xi^{,\lambda} \quad (17)$$

und die Terme

$$\mathcal{L}_{int}(\tilde{h}_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{int}(\xi) = \kappa_T \tilde{h}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\psi) + \kappa_S \xi T^\lambda{}_\lambda(\psi) \quad (18)$$

die Wechselwirkung zwischen den Materiefeldern ψ und den beiden Gravitationsfeldern beschreiben. κ_T und κ_S bezeichnen hierbei die tensorielle bzw. skalare Gravitationskonstante. Sie stehen mit der Newtonschen Gravitationskonstanten G in dem Zusammenhang

$$\kappa_S^2 + \kappa_T^2 = 8\pi G \quad (c = \hbar = 1!) \quad (19)$$

Die obige Lagrangedichte enthält keine Kopplung mehr zwischen den beiden Gravitationsfeldern, dafür aber koppelt das skalare Gravitationsfeld

direkt an die Materie, nämlich an die Spur ihres Energie-Impuls-Tensors. Wir werden jedoch sehen, daß diese Kopplung an die Materie der Ableitungskopplung zwischen den Gravitationsfeldern äquivalent ist.

Die Bewegungsgleichungen der beiden Gravitationsfelder lauten jetzt:

$$G_{\mu\nu}(\tilde{h}) = \kappa_T T_{\mu\nu}(\psi) \quad (20)$$

und

$$\square \xi = \kappa_S T^\lambda{}_\lambda(\psi) \quad (21)$$

Spezialisiert man sich auf die Eichung

$$(\tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{h}^\lambda{}_\lambda)^{;\mu} = 0 \quad (22)$$

so reduziert sich die Feldgleichung für $\tilde{h}_{\mu\nu}$ auf

$$\square (\tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tilde{h}^\lambda{}_\lambda) = \kappa_T T_{\mu\nu}(\psi) \quad (23)$$

zusammen mit (21) führt dies auf die zu (13) analoge Proportionalitätsbeziehung

$$\xi = - \frac{\kappa_S}{\kappa_T} \tilde{h}^\lambda{}_\lambda \quad (24)$$

Mit dieser durch die Hilbert-Eichung (22) erzwungenen Relation kann also das skalare Gravitationsfeld wieder aus der Theorie eliminiert werden.

Die Substitution

$$\kappa_T \tilde{h}_{\mu\nu} + \kappa_S \eta_{\mu\nu} \xi = \kappa_T \bar{h}_{\mu\nu} \quad (25)$$

ermöglicht es schließlich, die Theorie auf ihre erste Version zurückzuführen. Für weitere Details verweisen wir auf den oben zitierten Artikel von Sexl.

§ 3 Weyl-Transformationen

Eine fundamentale Größe, die im folgenden immer wieder auftreten wird, ist neben dem EIT selbst auch dessen Spur. Sie steht in engem Zusammenhang mit den sog. Weyl-Transformationen, die wir in diesem Abschnitt erläutern wollen.

3.1 Weyl-Transformationen und ihr Zusammenhang mit der Gruppe der konformen Transformationen im flachen Raum

Der Begriff der Weyl-Transformationen geht zurück auf den von Weyl⁵⁵⁻⁵⁷ im Jahre 1918 unternommenen Versuch, eine vereinheitlichte Feldtheorie der Gravitation und Elektrodynamik aufzustellen. Ausgangspunkt dieser Theorie war eine Erweiterung des Begriffs der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Letztere ist bekanntlich definiert durch die Symmetrie der Zusammenhangskoeffizienten, welche die Änderung eines Vektors V^μ bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung beschreiben:

$$\delta V^\alpha = - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu dx^\nu \quad \text{mit} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad (1)$$

und durch die Bedingung, daß sich das Längenquadrat des Vektors V^μ

$$L^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (2)$$

bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung nicht ändert:

$$\delta L^2 = 0 \quad (3)$$

Diese Bedingung legt die $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ eindeutig fest und führt auf

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\varrho} (g_{\mu\varrho,\nu} + g_{\nu\varrho,\mu} - g_{\mu\nu,\varrho}) = \{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix}\} \quad (4)$$

D.h. in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind die $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ durch die Christoffel-Symbole gegeben.

Die Weylsche Mannigfaltigkeit unterscheidet sich nun von der Riemannschen dadurch, daß in ihr die Bedingung (3) nicht mehr erfüllt ist; vielmehr ändert sich i.a. das Längenquadrat eines Vektors bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung um

$$\delta L^2 = -L^2 \varphi_\mu(x) dx^\mu \quad (5)$$

wo $\varphi_\mu(x)$ eine Vektorfunktion ist, die Weyl mit dem elektromagnetischen Vektorfeld identifizierte.

Nimmt man nun eine Umeichung sämtlicher Längen vor:^{†)}

$$L^2 \rightarrow \bar{L}^2 = \Lambda^2 L^2 \quad (6)$$

wo $\Lambda = \Lambda(x)$ eine positiv-definite ortsabhängige Funktion ist, so müssen sich $g_{\mu\nu}$ und φ_μ aufgrund von (2) und (5) gemäß

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Lambda^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad g^{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}^{\mu\nu}(x) = \Lambda^{-2}(x) g^{\mu\nu}(x) \quad (7a,b)$$

bzw.

$$\varphi_\mu(x) \rightarrow \bar{\varphi}_\mu(x) = \varphi_\mu(x) - 2 \partial_\mu \ln \Lambda(x) \quad (8)$$

transformieren. Transformationen der Art (7a,b), die die Ortskoordinaten unverändert lassen, bezeichnet man heute i.a. als Weyl-Transformationen.

Sie lassen den Winkel zwischen zwei Vektoren A und B:

$$\cos \alpha = \frac{g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta} \sqrt{g_{\gamma\delta} B^\gamma B^\delta}}$$

invariant und werden daher auch "konforme Transformationen im gekrümmten Raum" genannt. Zwischen ihnen und den konformen Transformationen im flachen Raum besteht, wie wir weiter unten sehen werden, ein enger Zusammenhang.

^{†)} Eine solche Umeichung ist stets möglich, wenn man - nach Weyl - davon ausgeht, daß nur Längenv e r h ä l t n i s s e eine physikalische Bedeutung haben, nicht aber der Wert der quadratischen Form $x \cdot y = x^\mu g_\mu y^\mu$ selbst.

Obwohl Weyl-Transformationen die Ortskoordinaten ungeändert lassen, so überführen sie doch das Linienelément

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

in

$$d\bar{s} = \Lambda(x) ds$$

Daher spricht man anstelle von Weyl-Transformationen auch von (lokalen) Skalentransformationen im gekrümmten Raum.

Die Theorie von Weyl basierte auf der Forderung nach Invarianz sowohl unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie unter den Transformationen (7a,b) und (8). Um die Christoffel-Symbole (4) in einen Ausdruck zu verwandeln, der unter den Transformationen (7a,b) und (8) invariant ist, hat man die partielle Ableitung ∂_μ durch die "Weyl-kovariante" Kombination

$$D_\mu = \partial_\mu + \varphi_\mu$$

zu ersetzen. Unter dieser Substitution gehen die Christoffel-Symbole (4) über in

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \varphi_\nu + \delta_\nu^\alpha \varphi_\mu - g_{\mu\nu} \varphi^\alpha) \quad (9)$$

Die allgemein kovariante Ableitung des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ ist dann zu definieren durch

$$g_{\mu\nu||\lambda} \equiv D_\lambda g_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\alpha g_{\mu\alpha}$$

die genauso wie die übliche kovariante Ableitung von $g_{\mu\nu}$ verschwindet.

Trotz ihrer mathematischen Eleganz stellte sich die Weylsche Theorie als unakzeptabel heraus, da nach ihr die Frequenz der von Atomen emittierten Spektrallinien von deren Vorgeschichte abhängt. Darüberhinaus sind die Differentialgleichungen, die sich in dieser Theorie für $g_{\mu\nu}$ ergeben, höherer als zweiter Ordnung ⁵⁶.

Obwohl daher die Weylsche Theorie kurze Zeit nach ihrem Entstehen verworfen wurde (u.a. von Weyl selbst), so hat doch der Aspekt der lokalen Skalentransformationen, um die es sich bei der Transformation (7a,b) handelt, gerade in den letzten Jahren aufgrund ihres Zusammenhangs mit der Gruppe der konformen Transformationen im flachen Raum wieder an Interesse gewonnen. Bevor wir jedoch auf diesen Zusammenhang eingehen, betrachten wir zunächst Weyl-Transformationen für beliebige Materiefelder $\psi(x)$:

$$\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) = \Lambda^{-d_W}(x) \psi(x) \quad (10)$$

wobei man die Zahl d_W das Weyl-Gewicht des entsprechenden Feldes nennt. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ und sein Inverses $g^{\mu\nu}$ haben hiernach also das Weylgewicht $d_W = -2$ bzw. $d_W = +2$. Nach welchen Gesichtspunkten d_W für ein Materiefeld gegebenen Spins zu wählen ist, wird weiter unten erklärt werden. An dieser Stelle sei lediglich darauf hingewiesen, daß es vom kanonischen Skalengewicht eines Feldes wohl zu unterscheiden ist.

Wir betrachten nun die Variation eines allgemein kovarianten Wirkungs-funktionalis

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} L(\psi, g) \quad (11)$$

unter den Transformationen (7) und (10) für ein $\Lambda(x)$, das nur infinitesimal von der Einheit abweicht:

$$\Lambda(x) = 1 + \lambda(x) \quad \text{mit} \quad |\lambda(x)| \ll 1 \quad (12)$$

Die entsprechende Variation hat eine sehr einfache Bedeutung⁵⁸. Aus

$$\delta_\lambda A = \int d^4x \left\{ \frac{\delta(\sqrt{-g} L(\psi, g))}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta(\sqrt{-g} L(\psi, g))}{\delta \psi} \delta \psi \right\} \quad (13)$$

mit

$$\delta g^{\mu\nu} = -2\lambda(x) g^{\mu\nu} \quad (14)$$

und

$$\delta \psi = -d_W \lambda(x) \psi \quad (15)$$

folgt nämlich aufgrund der bekannten Definition des Energie-Impuls-Tensors:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L(\psi, g))}{\delta g^{\mu\nu}}$$

und aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} L(\psi, g))}{\delta \psi} = 0$$

die Beziehung

$$\delta_\lambda A = - \int d^4x \sqrt{-g} T^\lambda_\lambda \lambda(x) \quad (16)$$

oder, da $\lambda(x)$ beliebig ist:

$$\frac{\delta_\lambda A}{\delta \lambda} = - \sqrt{-g} T^\lambda_\lambda \quad (17)$$

Diese Gleichung besagt offenbar, daß die Spur des EIT verschwindet, wenn das Wirkungsfunktional (11) unter den Transformationen (7) und (10) invariant ist, und umgekehrt, daß das Wirkungsfunktional (11) unter den genannten Transformationen invariant ist, falls die Spur des EIT verschwindet. Ist die Invarianz eines Wirkungsfunktionals durch nur wenige Terme gebrochen, etwa allein durch den Massenterm, so läßt sich nach Gl. (17) die Spur des EIT in einfacher Weise dadurch gewinnen, daß man die Variation der symmetriebrechenden Terme bei einer infinitesimalen Weyltransformation berechnet. Im nächsten Teil dieses Abschnitts werden wir uns mit weylinvarianten Lagrangedichten beschäftigen und sehen, wie man eine gegebene Lagrangedichte, die nicht weylinvariant ist, unter Zuhilfenahme eines skalaren Zusatzfeldes in einen weylinvarianten Ausdruck verwandeln kann.

Zuvor wollen wir jedoch auf den Zusammenhang eingehen, der zwischen den allgemeinen Koordinatentransformationen und Weyltransformationen einerseits und den konformen Transformationen im flachen Raum andererseits besteht. Letztere bilden eine 15-parametrische Gruppe⁵⁸, die als Untergruppen die 10-parametrische Poincaré-Gruppe, die 1-parametrische Gruppe der Skalentransformationen (auch Dilatationen genannt):

$$x^\mu \longrightarrow \bar{x}^\mu = \lambda x^\mu \quad (1 \text{ Parameter: } \lambda = \text{const.}) \quad (18)$$

und die 4-parametrische Gruppe der speziellen konformen Transformationen:

$$x^\mu \longrightarrow \bar{x}^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2(c \cdot x) + c^2 x^2} \quad (4 \text{ Parameter: } c^\mu = \text{const.}) \quad (19)$$

enthält.

Die zuletzt genannten Transformationen entstehen durch Hintereinanderausführung einer Inversion:

$$x^\mu \longrightarrow \bar{x}^\mu = \frac{x^\mu}{x^2},$$

einer Translation und einer nochmaligen Inversion. Die speziellen konformen Transformationen bilden eine abelsche Untergruppe, die stetig mit der Einheit ($c_\mu = 0$) zusammenhängt.

In infinitesimaler Form lassen sich die Skalentransformationen charakterisieren durch

$$\delta x^\mu = \bar{x}^\mu - x^\mu = \epsilon x^\mu, \quad \lambda = 1 + \epsilon \text{ mit } |\epsilon| \ll 1 \quad (20)$$

und die eigentlichen konformen Transformationen durch

$$\delta x^\mu = \bar{x}^\mu - x^\mu = c^\mu x^2 - 2x^\mu (c \cdot x), \quad |c^\mu| \ll 1 \quad (21)$$

Speziell folgt hieraus:

$$\delta x^2 = 2\epsilon x^2 \quad \text{für Skalentransformationen} \quad (22)$$

und

$$\delta x^2 = -2(c \cdot x)x^2 \quad \text{für spez. konforme Transf.} \quad (23)$$

D.h. in beiden Fällen verschwindet δx^2 , falls x^2 es tut. Anders ausgedrückt: Skalentransformationen und spezielle konforme Transformationen lassen - ebenso wie Poincaré-Transformationen - die Relation

$$ds^2 = 0$$

invariant: Jeder Punkt auf dem Lichtkegel wird von ihnen wieder in einen Punkt auf dem Lichtkegel abgebildet.

Die physikalische Bedeutung der Skalentransformationen bzw. speziellen konformen Transformationen wird natürlich erst deutlich, wenn man ihre Wirkung auf die Felder kennt. Für ein Feld ψ_i mit endlich vielen Komponenten, das bei einer infinitesimalen Transformation g der Koordinaten der Transformation $T(g)$ unterworfen wird, gewinnt man die Variation

$$\delta \psi_i = \bar{\psi}_i(x) - \psi_i(x) \quad (24)$$

bekanntlich aus dem Kommutator des Feldes mit der Erzeugenden der betreffenden Transformation. Im Fall der Skalentransformation erhält man auf diese Weise^{7,23,24,25}

$$\delta \psi_i = [\delta x^\mu \partial_\mu + d\epsilon] \psi_i \quad (25)$$

und im Fall der speziellen konformen Transformationen:

$$\delta \psi_i = [\delta x^\mu \partial_\mu - 2 d(c \cdot x) - 2 c^\mu x^\nu \Sigma_{\mu\nu}] \psi_i \quad (26)$$

Die Zahl d gibt hierbei die kanonische Dimension des Feldes an:

$$\begin{aligned} d &= 1 && \text{für Bosonen} \\ d &= 3/2 && \text{für Fermionen} \end{aligned} \quad (27)$$

und $\Sigma_{\mu\nu}$ steht für die Darstellungsmatrizen der Erzeugenden der Lorentzgruppe, wobei wir die Notation

$$\Sigma_{\mu\nu} \psi_i = (\Sigma_{\mu\nu})_i^j \psi_j$$

benutzt haben. Sie sind explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu} &= 0 && \text{für Spin0-Felder} \\ \Sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{4} [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] && \text{für Spin1/2-Felder} \\ (\Sigma_{\mu\nu})_i^j &= \eta_{\mu i} \delta_\nu^j - \eta_{\nu i} \delta_\mu^j && \text{für Spin1-Felder} \\ (\Sigma_{\mu\nu})_{ii'}^{jj'} &= (\eta_{\mu i} \delta_\nu^{j'} - \eta_{\nu i} \delta_\mu^{j'}) \eta^{ii'} + (\eta_{\mu i'} \delta_\nu^j - \eta_{\nu i'} \delta_\mu^j) \eta^{ii'} && \text{für Spin2-Felder} \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen einerseits sowie allgemeinen Koordinatentransformationen andererseits erkennt man folgendermaßen⁵⁸: Wir betrachten zunächst ein Bosefeld φ_i , das minimal an ein äußeres Gravitationsfeld gekoppelt ist, so daß sein Wirkungsfunktional invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist. Die zu einer infinitesimalen Änderung der Koordinaten

$$\delta x^\lambda = \bar{x}^\lambda - x^\lambda \approx \xi^\lambda \quad (28)$$

gehörende Variation des Gravitationsfeldes ist gegeben durch

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\lambda\mu} \quad (29)$$

Die entsprechende Variation des Materiefeldes φ_i , unter dem wir hier ein Spin0-Feld, Spin1-Feld oder Spin2-Feld verstehen wollen, lautet:

$$\delta \varphi = \xi^\lambda \partial_\lambda \varphi \quad (30a)$$

$$\delta \varphi_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda \varphi_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \varphi_\lambda \quad (30b)$$

$$\delta \varphi_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda \varphi_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda \varphi_{\lambda\mu} \quad (30c)$$

Gleichzeitig mögen nun das Gravitationsfeld und die Materiefelder einer infinitesimalen Weyltransformation unterworfen werden, unter denen sie sich nach Gl. (7) und (10) gemäß

$$\delta g_{\mu\nu} = 2\lambda(x) g_{\mu\nu} \quad (31)$$

$$\delta \varphi_i = -d_w^{(s)} \lambda(x) \varphi_i \quad (s = 0, 1, 2) \quad (32)$$

transformieren.

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß ein Wirkungsfunktional, das unter allgemeinen Koordinatentransformationen und Weyltransformationen mit geeigneten Gewichten invariant ist, bei Restriktion auf den flachen Raum ($g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$) invariant unter der 15-parametrigen Gruppe der konformen Transformationen ist. Hinsichtlich der Untergruppe der Poincaré-Gruppe ist diese Feststellung natürlich unabhängig von der Annahme der Weylgewichte. Es genügt daher, den Beweis allein für die Skalentransformationen und die speziellen konformen Transformationen anzutreten.

Um die Behauptung für Skalentransformationen einzusehen, setze man

$$\xi^\lambda = \varepsilon x^\lambda \quad (\text{vgl. hierzu (20) bzw. (28)}) \quad \text{und} \quad \lambda = -\varepsilon$$

Bei dieser Wahl von ξ^λ und λ nehmen die Variationsausdrücke (29) und (31) die Gestalt

$$\delta_K g_{\mu\nu} = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \delta_W g_{\mu\nu} = -2\varepsilon g_{\mu\nu} \quad +)$$

an. Die entsprechenden Variationsausdrücke (30 a,b,c) und (32) für die Materiefelder lauten:

a) im Fall eines Spin 0-Feldes:

$$\delta_K \varphi = \varepsilon x^\lambda \partial_\lambda \varphi \quad \text{bzw.} \quad \delta_W \varphi = d_w^{(0)} \varepsilon \varphi$$

b) im Fall eines Spin 1-Feldes:

$$\delta_K \varphi_\mu = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda \varphi_\mu + \varphi_\mu) \quad \text{bzw.} \quad \delta_W \varphi_\mu = d_w^{(1)} \varepsilon \varphi_\mu$$

c) im Fall eines Spin 2-Feldes:

$$\delta_K \varphi_{\mu\nu} = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} + 2 \varphi_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \delta_W \varphi_{\mu\nu} = d_w^{(2)} \varepsilon \varphi_{\mu\nu}$$

+) Die Indizes K und W sollen verdeutlichen, daß es sich um Variationen bei Koordinatentransformationen bzw. Weyltransformationen handelt.

Ist nun ein gegebenes Wirkungsfunktional sowohl unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie unter Weyltransformationen invariant, so bedeutet dies nach Obigem, daß es invariant ist unter den kombinierten Transformationen

$$\delta g_{\mu\nu} = \varepsilon x^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

und

$$a) \quad \delta \varphi = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda + d_w^{(0)}) \varphi$$

$$b) \quad \delta \varphi_\mu = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda + 1 + d_w^{(1)}) \varphi_\mu$$

$$c) \quad \delta \varphi_{\mu\nu} = \varepsilon (x^\lambda \partial_\lambda + 2 + d_w^{(2)}) \varphi_{\mu\nu}$$

Bei Restriktion auf den flachen Raum wird natürlich $\delta g_{\mu\nu} = 0$. Was bleibt, ist die Invarianz des Wirkungsfunktionals unter Skalentransformationen, falls man

$$d_w^{(0)} = 1, \quad d_w^{(1)} = 0, \quad d_w^{(2)} = -1$$

wählt (vgl. hierzu Formel (25)).

Im Fall der speziellen konformen Transformationen verläuft der Beweis analog. Man hat hier

$$\xi^\lambda = c^\lambda x^2 - 2 x^\lambda (c \cdot x) \quad (\text{vgl. hierzu (21) bzw. (28)}) \quad \text{und} \quad \lambda = 2 (c \cdot x)$$

zu setzen.

Für die Variationsausdrücke (29) und (31) sowie (30a,b,c) und (32) erhält man in diesem Fall

$$\delta_K g_{\mu\nu} = (c^\lambda x^2 - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda g_{\mu\nu} - 4 c \cdot x g_{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \delta_w g_{\mu\nu} = 4 c \cdot x g_{\mu\nu}$$

sowie

a) im Fall eines Spin 0-Feldes

$$\delta_K \varphi = (c^\lambda x^2 - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi \quad \text{bzw.} \quad \delta_w \varphi = -d_w^{(0)} 2 c \cdot x \varphi$$

b) im Fall eines Spin 1-Feldes

$$\delta_K \varphi_\mu = (c^\lambda x^2 - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi_\mu + 2 (c^\lambda x_\mu - x^\lambda c_\mu) \varphi_\lambda - 2 c \cdot x \varphi_\mu$$

$$\text{bzw.} \quad \delta_w \varphi_\mu = -d_w^{(1)} 2 c \cdot x \varphi_\mu$$

c) im Fall eines Spin 2-Feldes

$$\delta_K \varphi_{\mu\nu} = (c^\lambda x^2 - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} + 2 (c^\lambda x_\mu - x^\lambda c_\mu) \varphi_{\lambda\nu} + 2 (c^\lambda x_\nu - x^\lambda c_\nu) \varphi_{\lambda\mu} - 4 c \cdot x \varphi_{\mu\nu}$$

$$\text{bzw.} \quad \delta_w \varphi_{\mu\nu} = -d_w^{(2)} 2 c \cdot x \varphi_{\mu\nu}$$

Die Invarianz eines Wirkungsfunktionalen unter allgemeinen Koordinatentransformationen und unter Weyltransformationen bedingt jetzt die Invarianz unter den kombinierten Transformationen

$$\delta g_{\mu\nu} = (c^\lambda x^\lambda - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

bzw.

$$a) \delta \varphi = (c^\lambda x^\lambda - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi - d_W^{(0)} 2 c \cdot x \varphi$$

$$b) \delta \varphi_\mu = (c^\lambda x^\lambda - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi_\mu + 2 (c^\lambda x_\mu - x^\lambda c_\mu) \varphi_\lambda - 2 (1 + d_W^{(1)}) c \cdot x \varphi_\mu$$

$$c) \delta \varphi_{\mu\nu} = (c^\lambda x^\lambda - 2 c \cdot x x^\lambda) \partial_\lambda \varphi_{\mu\nu} + 2 (c^\lambda x_\mu - x^\lambda c_\mu) \varphi_{\lambda\nu} + 2 (c^\lambda x_\nu - x^\lambda c_\nu) \varphi_{\lambda\mu} - 2 (1 + d_W^{(2)}) c \cdot x \varphi_{\mu\nu}$$

Ein Blick auf die Transformationsformel (26) zeigt bei Berücksichtigung der für $\Sigma_{\mu\nu}$ angegebenen Ausdrücke, daß man beim Übergang von $g_{\mu\nu}$ zu $\gamma_{\mu\nu}$ auch Invarianz unter speziellen konformen Transformationen erhält, wenn man für die Weylgewichte $d_W^{(s)}$ ($s=0,1,2$) die oben angegebene Wahl trifft.

Damit ist gezeigt, daß eine allgemein-kovariante und weylinvariante Theorie beim Übergang zum flachen Raum invariant gegen die Gruppe der konformen Transformationen wird. Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch nicht richtig. Denn wie wir im nächsten Teil dieses Abschnitts sehen werden, folgt aus der Tatsache, daß eine Theorie im flachen Raum konform-invariant ist, keineswegs deren Weylinvarianz im gekrümmten Raum.

Bevor wir uns mit weylinvarianten Wirkungsfunktionalen beschäftigen, sei noch kurz angedeutet, wie man das Weyl-Gewicht $d_W^{(1/2)}$ eines Dirac-Feldes bestimmt. Es ist klar, daß wir die oben benutzte Methode hierfür nicht verwenden können, da sich das Wirkungsfunktional eines Fermions nur unter Benutzung des Vierbeinfeldes allgemein kovariant schreiben läßt und in einer Vierbeintheorie sämtliche Materiefelder als Weltskalare betrachtet werden. Die eine Tatsache, von der wir hier aber Gebrauch machen können, ist die, daß es sich bei Weyl-Transformationen um (lokale) Skalentransformationen handelt und daß daher nur solche Theorien weylinvariant sein können, in denen dimensionsbehaftete Größen - wie etwa Massen oder Kopplungskonstanten - nicht auftreten. Die andere ist die oben gemachte Feststellung, daß das allgemein kovariante Wirkungsfunktional eines Feldes weylinvariant ist, wenn die Spur des EIT dieses Feldes verschwindet.

Da dies aber für das masselose Dirac-Feld zutrifft, muß folglich sein Wirkungsfunktional

$$A(\psi, e) = \int d^4x \, e \, \bar{\psi} [i \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu)] \psi$$

(vgl. § 1.2 dieses Kapitels) weylinvariant sein.

Aufgrund von $e^\alpha_\mu e_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu}$ bedeutet nun eine Weyltransformation des metrischen Tensors für das Vierbeinfeld den Übergang zu

$$\bar{e}^\alpha_\mu = \lambda(x) e^\alpha_\mu$$

so daß

$$\delta e^\alpha_\mu = \lambda(x) e^\alpha_\mu$$

Es ist leicht nachzuweisen⁷, daß sich das Dirac-Feld dann nach

$$\delta \psi = -\frac{3}{2} \lambda(x) \psi$$

transformieren muß, wenn die Variation des angegebenen Wirkungsfunktionals unter Weyltransformationen verschwinden soll. M. a. W. es ist $d_W^{(1/2)} = 3/2$.

3.2 Weylinvariante Wirkungsfunktionale

Nachdem wir uns soeben mit dem Begriff der Weyl-Transformationen vertraut gemacht haben und deren Zusammenhang mit den konformen Transformationen im flachen Raum klargestellt haben, wollen wir uns jetzt mit der Frage nach der Existenz und Struktur weylinvarianter Wirkungsfunktionale beschäftigen.

Zunächst weisen wir noch einmal auf die oben benutzte Tatsache hin, daß nur solche Theorien invariant unter Weyl-Transformationen sein können, die keine dimensionsbehafteten Größen enthalten. Denn Weyl-Transformationen stellen ja (lokale) Skalentransformationen dar, und weder Wirkungsintegrale noch Bewegungsgleichungen, die Massen oder dimensionsbehaftete Kopplungskonstanten enthalten, können unter solchen Transformationen invariant sein ⁵⁶.

Natürlich besteht die Möglichkeit, etwa die Massen mitzutransformieren, aber solche Transformationen würden den Rahmen der Weyl-Transformationen sprengen und sollen hier nicht diskutiert werden. Ihre Bedeutung im Rahmen von Skalar-Tensor-Theorien der Gravitation ist von Brans und Dicke ¹¹⁶ sowie anderen Autoren, die sich mit der Äquivalenz der verschiedenen Versionen von Skalar-Tensor-Theorien der Gravitation beschäftigt haben, eingehend untersucht worden ^{53,60,61}.

Das wohl prominenteste Beispiel für ein weylinvariantes Wirkungsfunktional ist das des Photonfeldes:

$$A = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{\kappa\lambda} \quad (1)$$

mit

$$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (2)$$

Daß dieses Wirkungsfunktional weylinvariant ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß der Ausdruck $\sqrt{-g} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}$ in den Komponenten von $g_{\mu\nu}$ homogen vom Grade Null ist und daß einem Vektorfeld das Weylgewicht Null zugeordnet ist:

$$\delta_\lambda A_\mu = 0 \quad (3)$$

Im flachen Raum ist somit das Wirkungsfunktional des Photonfeldes invariant gegen die 15-parametrische Gruppe der konformen Transformationen.

Tatsächlich war es auch die Elektrodynamik, die das erste Mal das Interesse der Physiker an der konformen Gruppe weckte, als nämlich Cunningham⁶² und Bateman⁶³ 1910 feststellten, daß die Maxwell-Gleichungen nicht nur unter der Poincaré-Gruppe invariant sind, sondern auch unter der Gruppe der Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen. Eigenartigerweise ist das Photonfeld, das minimal an ein äußeres Gravitationsfeld koppelt, das einzige Feld ganzzahligen Spins, dessen allgemein kovariantes Wirkungsfunktional auch weylinvariant ist. Für das allgemeine kovariante Wirkungsfunktional eines masselosen Skalarfeldes:

$$A = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi_{,\mu} g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu} \quad (4)$$

trifft dies nicht zu, obwohl es im flachen Raum sowohl unter Skalentransformationen wie unter speziellen konformen Transformationen invariant ist (unter letzteren allerdings nur bis auf eine Divergenz)²⁴. Fügt man jedoch zu (4) den Term

$$- \frac{1}{12} \int d^4x \sqrt{-g} R(g) \varphi^2$$

hinzu, so ist das resultierende Wirkungsfunktional

$$A' = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{12} R(g) \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu} \right\} \quad (5)$$

unter der Weyl-Transformation

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \Lambda^2(x) g_{\mu\nu}, \quad \varphi \longrightarrow \Lambda^{-1}(x) \varphi \quad (6)$$

tatsächlich invariant⁷, geht jedoch im flachen Raum in das übliche Wirkungsfunktional eines masselosen Skalarfeldes über, da dann der Krümmungsskalar $R(g)$ verschwindet. Der Ausdruck (5) stimmt mit dem von Brans und Dicke postulierten Wirkungsintegral der Gravitation

$$A_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{8\omega} R(g) \varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu} \right\}$$

überein, wenn man dort für den Parameter ω den in der Theorie von Brans und Dicke (in der ω positiv ist) nicht-erlaubten Wert

$$\omega = -\frac{3}{2}$$

wählt^{64,65}. Bei dieser Wahl von ω geht also die Theorie von Brans und

Dicke in eine weylinvariante Gravitationstheorie über. Diese ist jedoch - wie Anderson⁶⁵ gezeigt hat - der Einsteinschen Gravitationstheorie äquivalent, da man dann das skalare Gravitationsfeld $\varphi(x)$ mit Hilfe der Eichfunktion

$$\Lambda^2(x) = \frac{1}{6} \kappa_g^2 \varphi^2(x)$$

"wegeichen" kann. (Umgekehrt gelangt man zu dem weylinvarianten Wirkungsfunktional (5), wenn man im Einsteinschen Wirkungsfunktional die Substitution $g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{6} \kappa_g^2 \varphi^2 g_{\mu\nu}$ vornimmt).

Die Bewegungsgleichung des durch (5) beschriebenen masselosen Skalarfeldes lautet

$$\square \varphi = -\frac{1}{6} R(g) \varphi \quad (7)$$

mit

$$\square \varphi \equiv \varphi^{;\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu})_{,\mu}$$

Der sich aus der Variation von A' nach $g_{\mu\nu}$ ergebende EIT von φ hat die Gestalt

$$T_{\mu\nu}(\varphi) = T_{\mu\nu}^c(\varphi) + T_{\mu\nu}^i(\varphi) \quad (8)$$

wobei $T_{\mu\nu}^c(\varphi)$ den "kanonischen" EIT bedeutet:

$$T_{\mu\nu}^c(\varphi) = (\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi_{,\lambda} g^{\lambda\kappa} \varphi_{,\kappa}) \quad (9)$$

während $T_{\mu\nu}^i(\varphi)$ den Anteil beschreibt, der von der nicht-minimalen Kopplung des φ -Feldes an den Krümmungsskalar $R(g)$ herrührt. Er ist gegeben durch

$$T_{\mu\nu}^i(\varphi) = -\frac{1}{6} (D_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square) \varphi^2 - \frac{1}{6} \varphi^2 G_{\mu\nu} \quad (10)$$

mit

$$D_{\mu\nu} \varphi^2 \equiv \varphi^2_{;\mu;\nu}$$

Im flachen Raum geht $T_{\mu\nu}(\varphi)$ über in den von Callan et al.²³ vorgeschlagenen, "verbesserten" EIT

$$T_{\mu\nu}^{\text{impr}}(\varphi) = (\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda}) + \frac{1}{6} (\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \varphi^2 \quad (11)$$

der sich gegenüber dem kanonischen EIT dadurch auszeichnet, daß seine Spur (wegen der Bewegungsgleichung $\square\varphi = 0$) verschwindet. Dies gilt natürlich wegen der Weylinvarianz des Wirkungsfunktional A' auch für $T_{\mu\nu}(\varphi)$. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man in dem durch Spurbildung von (8) entstehenden Ausdruck nur die Bewegungsgleichung (7) einzusetzen, um zu sehen, daß

$$T^\lambda_\lambda(\varphi) = 0$$

ist.

Zusammenfassend stellen wir noch einmal fest: Das allgemein kovariante Wirkungsfunktional eines masselosen Skalarfeldes kann durch Hinzufügen einer nicht-minimalen Kopplung an das Gravitationsfeld in einen weylinvarianten Ausdruck verwandelt werden, wobei jedoch die nicht-minimale Kopplung beim Übergang zum flachen Raum keinerlei Wirkung auf die Bewegungsgleichung hat, da der Krümmungstensor für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ verschwindet. Geändert wird lediglich der kanonische EIT und zwar um einen Zusatzterm, der die Struktur eines Superpotentials besitzt. Genauer gesagt: $T^\epsilon_{\mu\nu}$ geht über in

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T^{\text{impr.}}_{\mu\nu} = T^\epsilon_{\mu\nu} + \partial^\kappa \partial^\lambda m_{\mu\nu,\kappa\lambda}$$

wobei $m_{\mu\nu,\kappa\lambda}$ gegeben ist durch den Ausdruck

$$m_{\mu\nu,\kappa\lambda} = (\eta_{\mu\nu} \eta_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\kappa\nu} \eta_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \eta_{\kappa\mu} \eta_{\lambda\nu}) \frac{1}{6} \varphi^2$$

Dieser gehorcht, wie man sich unmittelbar überzeugt, den Symmetriebeziehungen

$$m_{\mu\nu,\kappa\lambda} = m_{\nu\mu,\kappa\lambda} = m_{\mu\nu,\lambda\kappa}$$

und

$$m_{\mu\nu,\kappa\lambda} + m_{\kappa\nu,\lambda\mu} + m_{\lambda\nu,\mu\kappa} = 0$$

so daß die Divergenzgleichung

$$\partial^\lambda \partial^\kappa \partial^\lambda m_{\mu\nu,\kappa\lambda} = 0$$

identisch erfüllt ist und $\tilde{T}_{\mu\nu}$ die gleichen Generatoren der Poincaré-Gruppe liefert wie $T^\epsilon_{\mu\nu}$. Jedoch vereinfachen sich bei Benutzung von $\tilde{T}_{\mu\nu}$

die Noetherströme, die den Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen entsprechen. Für weitere Details verweisen wir auf die Literatur ^{23,24,43,58}.

Einige Bemerkungen noch über das Verhalten unter Weyl-Transformationen der kovariantisierten Wirkungsfunktionale eines Spin 2- und Spin 1/2-Feldes: Vom masselosen Spin 1/2-Feld wissen wir bereits aus dem Vorhergehenden, daß sein allgemein kovariantes Wirkungsfunktional auch unter Weyl-Transformationen invariant ist, falls man ihm das Weylgewicht $d_W^{(1/2)} = 3/2$ zuordnet.

Viel komplizierter ist die Situation im Fall eines masselosen Spin 2-Feldes. Koppelt man dieses minimal an ein äußeres Gravitationsfeld, so treten hier erhebliche Konsistenzprobleme (hinsichtlich der Freiheitsgrade) auf, die typisch zu sein scheinen für Felder, deren Spin größer als Eins ist. Diese Probleme, die auch bei Hinzunahme nicht-minimaler Kopplungen bestehen bleiben, sind von Deser u.a. ⁶⁶⁻⁶⁷ ausführlich diskutiert worden, und es würde zu weit führen, an dieser Stelle auf Einzelheiten dieses Fragenkomplexes näher einzugehen. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang jedoch, daß Deser ⁶⁸ u.a. auch gezeigt hat, daß das Wirkungsfunktional eines masselosen Spin 2-Feldes im flachen Raum zwar invariant ist unter Skalentransformationen, nicht aber unter speziellen konformen Transformationen. Somit kann es also im gekrümmten Raum auch nicht invariant unter Weyl-Transformationen sein.

Abschließend behandeln wir jetzt noch die Frage, wie man ein beliebiges, allgemein kovariantes Wirkungsintegral unter Zuhilfenahme eines skalaren Zusatzfeldes in einen weylinvarianten Ausdruck verwandeln kann. (7) Die Beantwortung dieser Frage ist im Prinzip sehr einfach. Denn ein Wirkungsfunktional ist offenbar dann weylinvariant, wenn alle in ihm auftretenden Felder des Weylgewicht Null haben. Um aber von einem Feld mit dem Weylgewicht $d_W^{(s)}$:

$$\delta \Psi = \lambda(x) d_W^{(s)} \Psi \quad (12)$$

zu einer Größe mit dem Weylgewicht Null zu gelangen, braucht man dieses

Feld nur mit σ^{-d_w} zu multiplizieren, wenn σ ein skalares Feld bedeutet, das sich unter Weyl-Transformationen nach

$$\delta \sigma = -\lambda(x) \sigma \quad (13)$$

transformiert. Der Ausdruck

$$\hat{\psi} = \psi \sigma^{-d_w^{(s)}} \quad (14)$$

verhält sich dann unter Weyl-Transformationen wie eine homogene Funktion vom Grade Null.

Ist σ ein Goldstonefeld mit nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert:

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \epsilon(x) \quad (\sigma_0 = \langle 0 | \sigma | 0 \rangle \neq 0)$$

und entwickelt man

$$\hat{\psi}(x) = \psi (\sigma_0 + \epsilon)^{-d_w^{(s)}} = \psi \sigma_0^{-d_w} (1 - d_w \frac{\epsilon}{\sigma_0} + \dots)$$

nach ϵ , so ist $\hat{\psi}/\sigma_0^{d_w}$ in nullter Näherung mit dem ursprünglichen Feld ψ identisch, während die höheren Näherungen Wechselwirkungsterme liefern.

Wir werden von diesem Verfahren später Gebrauch machen, um z.B. die in der hadronischen Lagrangefunktion auftretenden Masseterme weylinvariant zu machen. Zwei einfache Beispiele mögen dies illustrieren:

Die Massenterme der allgemein kovarianten Lagrangedichte eines Spin 0-Feldes und Spin 1-Feldes sind gegeben durch

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} m^2 \varphi^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \sqrt{-g} M^2 \varphi_\mu g^{\mu\nu} \varphi_\nu$$

Nach der oben erläuterten Methode gehen diese in weylinvariante Ausdrücke über, wenn man in ihnen die Substitutionen

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \sigma^2, \quad g^{\mu\nu} \longrightarrow \hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sigma^{-2} \quad (d_w = \mp 2)$$

und

$$\varphi \longrightarrow \hat{\varphi} = \varphi \sigma^{-1} \quad (d_w^{(0)} = 1)$$

$$\varphi_\mu \longrightarrow \hat{\varphi}_\mu = \varphi_\mu \quad (d_w^{(1)} = 0)$$

vornimmt. Das Ergebnis dieser Substitutionen lautet:

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} m^2 \varphi^2 \sigma^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} M^2 \sqrt{-g} \varphi_\mu g^{\mu\nu} \varphi_\nu \sigma^2$$

und die Entwicklung nach $\xi = \sigma - \sigma_0$ liefert in erster Näherung trilineare Kopplungen, die proportional zum Massenquadrat der Felder ϕ bzw. ψ_u sind. Die unter Zuhilfenahme des Skalarfeldes σ hergestellte Weylinvarianz der Lagrangedichte eines massiven Feldes ψ ist natürlich nicht mehr identisch mit dem Verschwinden der Spur des EIT dieses Teilchens; denn es gilt ja jetzt

$$\delta_\lambda A = \int d^4x \left\{ - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} g^{\mu\nu} 2\lambda - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \alpha_w^{(s)} \lambda \psi - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \sigma} \lambda \sigma \right\} = 0 \quad (15)$$

d.h.

$$T_\lambda^\lambda = - \frac{1}{1-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \sigma} \sigma \neq 0 \quad (16)$$

K A P I T E L II

Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz

Inhalt des vorliegenden Kapitels werden im wesentlichen die von Raman entwickelte, lorentzinvariante Lagrangetheorie der TMD und deren allgemein kovariante Formulierung nach Salam et al. sein.

Um besser verfolgen zu können, wie eng die Parallelen zwischen der Lagrangetheorie der TMD und der der VMD sind; erinnern wir zunächst noch einmal an die grundlegenden Züge der von Kroll, Lee und Zumino³ (KLZ) konstruierten Lagrangetheorie der VMD.

§1. Erinnerung an die Lagrangetheorie der Vektormesonen-Dominanz

Ausgangspunkt der Lagrangetheorie der VMD ist die Quelle-Feld-Identität

$$\mathcal{F}_\mu^r = \lambda_\varrho \varrho_\mu + \lambda_\omega \omega_\mu + \lambda_\varphi \varphi_\mu$$

nach der sich der hadronische Anteil des elektromagnetischen Stromes bei kleinen Energien als Linearkombination der Felder der neutralen Spin-1-Mesonen darstellen läßt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf die Isovektorkomponente von $\mathcal{F}_\mu^r$, so daß sich die angegebene Quelle-Feld-Identität auf

$$\mathcal{F}_\mu^r = \lambda_\varrho \varrho_\mu \quad (1)$$

reduziert.

Gesucht ist nun eine Lagrangefunktion $\mathcal{L}$, die aufgrund der zugehörigen Bewegungsgleichungen zu dieser Quelle-Feld-Identität führt.

Nach K L Z besitzt $\mathcal{L}$ die Struktur

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varrho + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_r^{\text{int}} \quad (2)$$

wobei $\mathcal{L}_\varrho$ das mit den Hadronen wechselwirkende neutrale ϱ -Meson beschreibt:

$$\mathcal{L}_\varrho = -\frac{1}{4}(G_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m_\varrho^2 \varrho_\mu^2 - g_\varrho \mathcal{F}_\mu^{\text{had.}} \varrho^\mu \quad (3)$$

mit

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \varrho_\nu - \partial_\nu \varrho_\mu \quad (4)$$

und $\mathcal{L}_\gamma$ die Lagrangefunktion des freien Photonfeldes darstellt:

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 \quad (5)$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6)$$

Der entscheidende Term ist $\mathcal{L}_\gamma^{\text{int}}$, der die elektromagnetische Wechselwirkung charakterisiert. Er ist festgelegt durch die Forderungen, daß er invariant sein muß unter der Eichtransformation

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (7)$$

und zu der Quelle-Feld-Identität (1) führen soll. Aufgrund der letzten Forderung könnte man versucht sein, eine $q\gamma$ -Kopplung der Art

$$\lambda_q q_\mu A^\mu \quad (8)$$

anzunehmen, da diese automatisch die Quelle-Feld-Identität (1) zur Folge hätte. Ein solcher Term wäre jedoch nicht eichinvariant. Denn der durch die Eichtransformation (7) erzeugte Zusatzterm

$$\lambda_q q_\mu \partial^\mu \Lambda$$

reduziert sich nur dann auf eine Divergenz, falls $\partial^\mu q_\mu = 0$ ist. Diese Gleichung stellt jedoch keine kinematische Identität dar, sondern ergibt sich aus der Feldgleichung, falls die dynamische Bedingung $\partial^\mu \mathcal{F}_\mu^{\text{hadr}} = 0$ erfüllt ist. Darüberhinaus führt die störungstheoretische Behandlung der angegebenen Kopplung zu einer imaginären Masse des Photons². Sie ist also auch aus diesem Grund unbrauchbar.

KLZ ist es nun gelungen, eine Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{q\gamma}$ zu konstruieren, die sowohl die Forderung nach Eichinvarianz erfüllt als auch die Strom-Feld-Identität (1) liefert. Sie hat die Gestalt

$$\mathcal{L}_\gamma^{\text{int}} = e \frac{\lambda_q q_q}{m_q} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{q_q} G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{F}_\mu^{\text{hadr}} A^\mu \right) \quad (9)$$

$\mathcal{L}_{q\gamma}$ setzt sich also zusammen aus zwei Termen, von denen der erste manifest eichinvariant ist, während der zweite bei der Eichtransformation (7) einen Zusatzterm liefert, der sich auf eine Viererdivergenz reduziert, falls $\mathcal{F}_\mu^{\text{hadr}}$ divergenzfrei ist. Letzteres soll aber vorausgesetzt werden.

Um zu sehen, daß $\mathcal{L}_q$ tatsächlich auf die gewünschte Strom-Feld-Identität führt, schreiben wir noch die Bewegungsgleichungen auf. Die des q -Mesons lautet:

$$\partial^\mu G_{\mu\nu} + m_q^2 q_\nu = g_q \mathcal{F}_\nu^{\text{hadr.}} + O(e) \quad (10)$$

woraus wegen

$$\partial^\nu \mathcal{F}_\nu^{\text{hadr.}} = 0 \quad (11)$$

auch

$$\partial^\nu q_\nu = 0 \quad (12)$$

folgt.

Die Maxwell-Gleichung für das wechselwirkende Photonfeld ist gegeben durch

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = e \mathcal{F}_\nu^y \quad (13)$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$\mathcal{F}_\nu^y = \frac{1}{e} \frac{\delta \mathcal{L}_{q\gamma}}{\delta A^\nu} = \frac{\lambda_q g_q}{m_q^2} (\mathcal{F}_\nu^{\text{hadr.}} - \frac{1}{g_q} \partial^\mu G_{\mu\nu}) + O(e) \quad (14)$$

Bei Benutzung der Bewegungsgleichung (10) folgt hieraus unmittelbar die gewünschte Identität

$$\mathcal{F}_\nu^y = \lambda_q q_\nu \quad (15)$$

Zur Bestimmung der Konstanten λ_q benutzt man die Tatsache, daß sich der Strom $\mathcal{F}_\nu^{\text{hadr.}}$, da er ein erhaltener Vektorstrom und Quelle des neutralen q -Meson-Feldes ist, unter Isospindrehungen wie die $I_z = 0$ -Komponente eines Isotriplets verhält. Daher ist das Raumintegral über die zeitliche Komponente von $\mathcal{F}_\mu^{\text{hadr.}}$ proportional der z-Komponente des Isospinoperators, d.h. man kann schreiben

$$Q = I_z = c \int \mathcal{F}_0^{\text{hadr.}} d^3x$$

wobei die Konstante c gleich Eins gesetzt werden kann. Mit dem in dieser Weise normierten Integral ergibt sich dann

$$\lambda_q = m_q^2 / g_q \quad (16)$$

Wir wollen hier nicht auf weitere Details - wie etwa Renormierungseffekte oder allzu bekannte experimentelle Konsequenzen - eingehen. Lediglich zwei Punkte seien noch erwähnt, die sich bei der Formulierung einer analogen Lagrangetheorie der TMD als sehr wichtig herausstellen werden.

Der erste Punkt bezieht sich auf eine Art Ankopplungsvorschrift, durch die man die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{q\gamma}$ gewinnt. Es zeigt sich nämlich, daß die in $\mathcal{L}_{q\gamma}$ auftretenden Terme erzeugt werden, wenn man im masselosen Anteil von $\mathcal{L}_q$, d.h. in

$$-\frac{1}{4} (G_{\mu\nu})^2 - g_q \bar{\psi}_\mu^{\text{hadron}} \psi^\mu$$

die Substitution

$$q_\mu \longrightarrow q_\mu + \frac{\lambda_q e}{m_q^2} A_\mu \quad (17)$$

vornimmt und sich auf Terme erster Ordnung in e beschränkt. Etwas Entsprechendes gilt, wie wir sehen werden, auch im Spin 2-Fall.

Der zweite Punkt betrifft eine alternative $q\gamma$ -Kopplung, zu der man gelangt, wenn man die Felder q_μ und A_μ gemäß

$$q'_\mu = q_\mu + \frac{e}{g_q} A_\mu \quad (18)$$

$$A'_\mu = \left(1 - \frac{e^2}{g_q^2}\right)^{1/2} A_\mu \quad (19)$$

umtransformiert und die Ladung

$$e' = \left(1 - \frac{e^2}{g_q^2}\right)^{-1/2} e \quad (20)$$

einführt. In diesen neuen Größen schreibt sich $\mathcal{L}$ in der Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F'_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} (G'_{\mu\nu})^2 - g_q q'_\mu \bar{\psi}_\mu^{\text{hadron}} + \frac{1}{2} m_q^2 \left(q'_\mu - \frac{e'}{g_q} A'_\mu\right)^2 \quad (21)$$

mit

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad \text{und} \quad G'_{\mu\nu} = \partial_\mu q'_\nu - \partial_\nu q'_\mu$$

Wie man sieht, koppelt das Photonfeld jetzt nicht mehr an den hadronischen Strom $\bar{\psi}_\mu^{\text{hadron}}$, und die einzige Teilchen-Photon-Kopplung ist die in dem Massenterm enthaltene $q\gamma$ -Kopplung $-m_q^2 \frac{e'}{g_q} q'_\mu A'^\mu$, die wir oben aus Gründen der Eichinvarianz verworfen hatten. Jedoch ist leicht zu sehen,

daß die Kombination $1/2 \cdot m_q^2 (Q'_\mu - \frac{e'}{g_q} A'_\mu)^2$ eichinvariant ist, da für die neuen Felder die ursprüngliche Eichtransformation (7) den Übergang

$$A'_\mu \longrightarrow A'_\mu + \partial_\mu \Lambda' \quad (22)$$

und

$$Q'_\mu \longrightarrow Q'_\mu + \frac{e'}{g_q} \Lambda' \quad (23)$$

bedeutet, wobei

$$\Lambda' = (1 - \frac{e^2}{g_q^2}) \Lambda \quad (24)$$

Die Kopplung $-(e'/g_q) m_q^2 Q'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} m_q^2 (e'/g_q)^2 A'^2_\mu$ hat nun auch keine imaginäre Photonmasse mehr zur Folge, sondern bedeutet lediglich eine Ladungsrenormierung, d.h. e^2 geht über in $e^2(1 - \frac{e^2}{g_q^2})^2$.

Wir haben diese alternative $q\gamma$ -Kopplung deswegen erwähnt, weil die analoge Kopplung im Spin 2-Fall die von ISS vorgeschlagene, allgemein kovariante Formulierung der Ramanschen lorentzinvarianten Lagrangetheorie der TMD geradezu suggeriert.

§2. Lorentzinvariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz

Geht man davon aus, daß sich der EIT als Quelle des Gravitationsfeldes wie ein SU(3)-Singlett transformiert, so läuft die Hypothese der TMD auf die Annahme einer Quelle-Feld-Identität hinaus, die den EIT mit dem Feld eines neutralen Spin2-Teilchens verknüpft, das sich unter SU(3)-Transformationen ebenfalls wie ein Singlett verhält. Die einfachste solcher Verknüpfungen, die der Divergenzfreiheit des EIT Rechnung trägt, ist - wie wir später sehen werden - gegeben durch

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (F_{\mu\nu}^0 - \gamma_{\mu\nu} F_{\lambda}^{0\lambda}) \quad (1)$$

wobei das Feld $F_{\mu\nu}^0$ aus Einfachheitsgründen zunächst mit dem Feld des physikalischen f-Mesons identifiziert werden soll. Auf die bekannte f-f'-Mischung gehen wir erst später ein.

Bei der Konstruktion einer Lagrangetheorie, die die Relation (1) zur Folge hat, ist es natürlich naheliegend, sich von der Analogie zur VMD leiten zu lassen, indem man das Photonfeld durch das Gravitationsfeld und das massive Vektorfeld φ_μ durch das massive Tensorfeld $F_{\mu\nu}^0$ ersetzt. Diese Analogie läßt sich allerdings nur dann voll ausschöpfen, wenn man sich auf die lineare Theorie der Gravitation beschränkt und das Gravitationsfeld durch das aus Kap. I, § 1.3 bekannte Feld $h_{\mu\nu}$ beschreibt, das als Abweichung des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}(x)$ von der Minkowski-Metrik $\gamma_{\mu\nu}$ definiert war:

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu} - 2\kappa_g h_{\mu\nu} \quad (2)$$

Der zum Ausdruck (2) aus § 1 dieses Kapitels analoge Ansatz für die gesuchte Lagrangefunktion lautet dann:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_h^{int} \quad (3)$$

$\mathcal{L}_f$ enthält - analog zu $\mathcal{L}_\varphi$ - neben der Lagrangefunktion des freien f-Mesons einen Wechselwirkungsanteil $\mathcal{J}^{hadr}(F_{\mu\nu}^0)$, der die Kopplung des f-Mesons an die Hadronen beschreibt (vgl. Formel (16) aus Kap. I, § 1.3):

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu\lambda,\xi\sigma\tau} F_{\xi\sigma\tau}^0 - \frac{1}{2} M_0^2 (F_{\mu\nu}^0 F^{0\mu\nu} - F_{\mu}^{0\mu} F_{\nu}^{0\nu}) + \mathcal{J}^{hadr}(F_{\mu\nu}^0) \quad (4)$$

Die Form von $J^{\text{hadr}}(F_{\mu\nu}^0)$ soll zunächst noch offen bleiben. Falls der Quellstrom

$$J_{\mu\nu}^{\text{hadr}} \equiv \frac{1}{\kappa_f} \frac{\delta J^{\text{hadr}}(F_{\mu\nu}^0)}{\delta F^0_{\mu\nu}} \quad (5)$$

unabhängig ist von $F_{\mu\nu}^0$, kann man natürlich

$$J^{\text{hadr}}(F_{\mu\nu}^0) = \kappa_f F^0{}^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^{\text{hadr}} \quad (6)$$

schreiben, doch soll von dieser speziellen Struktur erst später Gebrauch gemacht werden. Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_h$, die das freie Gravitationsfeld beschreibt, lautet:

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda,\rho\sigma\tau} h_{\rho\sigma,\tau} \quad (7)$$

Entscheidend ist die Konstruktion einer geeigneten Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{fh}$, die die Wechselwirkung des Gravitationsfeldes mit dem f-Meson und den übrigen Hadronen charakterisiert. Ähnlich wie $\mathcal{L}_{gf}$ ist auch $\mathcal{L}_{fh}$ durch zwei Forderungen festgelegt, nämlich dadurch, daß sie invariant sein muß unter der Eichtransformation

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \quad (8)$$

und zu der Quelle-Feld-Identität (1) führen soll. In Analogie zum Spin 1-Fall wird man für $\mathcal{L}_{fh}$ eine ähnliche Struktur vermuten dürfen, wie sie $\mathcal{L}_{gf}$ besitzt, und daher von dem Ansatz

$$\mathcal{L}_h^{\text{int}} = \mathcal{L}_{fh} + \frac{\lambda_f \kappa_f}{M_0^2} \kappa_g h^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^{\text{hadr}} \quad (9)$$

ausgehen, wobei $\mathcal{L}_{fh}$ bilinear in den Ableitungen von $h_{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}^0$ sein soll und wir annehmen wollen, daß der oben definierte Strom $J_{\mu\nu}^{\text{hadr}}$ divergenzfrei ist:

$$\partial^\mu J_{\mu\nu}^{\text{hadr}} = 0 \quad (10)$$

Unter dieser Bedingung ist der Kopplungsterm $h^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^{\text{hadr}}$ eichinvariant, so daß $\mathcal{L}_{fh}$ es auch sein muß. Die Erfahrung im Fall der VMD legt es nahe, die dort angegebene "Ankopplungsvorschrift"

$$g_\mu \longrightarrow g_\mu + \frac{\lambda_g e}{m_g} A_\mu$$

auf den vorliegenden Spin 2-Fall zu übertragen, um zu der gesuchten Lagrangefunktion $\mathcal{L}'_{fh}$ zu gelangen. Dementsprechend führen wir im kinetischen Teil von $\mathcal{L}_f$, d.h. in

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^{\circ} H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} F_{q\sigma,\tau}^{\circ}$$

die Substitution

$$F_{\mu\nu}^{\circ} \longrightarrow F_{\mu\nu}^{\circ} + \frac{\lambda_f \kappa_g}{M_o^2} h_{\mu\nu} \quad (11)$$

durch, und wählen als Ansatz für $\mathcal{L}'_{fh}$ die durch diese Substitution induzierten, in κ_g linearen Zusatzterme, nämlich

$$\mathcal{L}'_{fh} = \frac{\lambda_f \kappa_g}{M_o^2} F_{\mu\nu,\lambda}^{\circ} H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} h_{q\sigma,\tau} \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ist - wie man sich leicht überzeugt - eichinvariant (allerdings nur bis auf Divergenzen), und die volle Lagrangefunktion der Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_h^{\text{int}} = \kappa_g \frac{\lambda_f \kappa_g}{M_o^2} \left(\frac{1}{\kappa_g} F_{\mu\nu,\lambda}^{\circ} H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} h_{q\sigma,\tau} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{had.}} h^{\mu\nu} \right) \quad (13)$$

stimmt überein mit der, die Raman auf systematischem Wege unter Benutzung der Quelle-Feld-Identität (1) und der Bewegungsgleichung des f-Meson-Feldes hergeleitet hat. Die hier benutzte Methode, um $\mathcal{L}_h^{\text{int}}$ zu bestimmen, zeigt jedoch etwas deutlicher, wie stark die Analogie zwischen VMD und TMD ist.

Um zu sehen, daß die soeben konstruierte Lagrangefunktion tatsächlich zu der Quelle-Feld-Identität führt, schreiben wir zunächst die Eulerschen Gleichungen des f-Meson-Feldes und des Gravitationsfeldes auf. Sie lauten:

$$G_{\mu\nu}(F^{\circ}) + M_o^2 (F_{\mu\nu}^{\circ} - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{\circ\lambda}) = \kappa_g \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{had.}} + O(\kappa_g) \quad (14)$$

und

$$G_{\mu\nu}(h) = \kappa_g T_{\mu\nu} \quad (15)$$

wobei $G_{\mu\nu}(F^{\circ})$ den analog zu $G_{\mu\nu}(h)$ definierten "Einstein-Tensor" des f-Meson-Feldes darstellt:

$$G_{\mu\nu}(F^{\circ}) = \square F_{\mu\nu}^{\circ} - F_{\mu\lambda,\nu}^{\circ\lambda} - F_{\nu\lambda,\mu}^{\circ\lambda} + F_{\lambda,\mu\nu}^{\circ\lambda} + \eta_{\mu\nu} (F^{\circ\kappa\lambda}_{,\kappa\lambda} - \square F_{\lambda}^{\circ\lambda}) \quad (16)$$

und $T_{\mu\nu}$ der symmetrische Energie-Impuls-Tensor ist:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa_g} \frac{\delta \mathcal{L}_h^{\text{int}}}{\delta h^{\mu\nu}} \quad (17)$$

Aufgrund der Identität

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}(\tau^0) \equiv 0$$

und der vorausgesetzten Divergenzfreiheit von $\tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}}$ folgt aus der Bewegungsgleichung (14) die Nebenbedingung

$$\partial^\mu (\tilde{F}_{\mu\nu}^0 - \gamma_{\mu\nu} \tilde{F}_\lambda^{0\lambda}) = 0 \quad (18)$$

und daher läßt sich (14) auch schreiben in der Form

$$(\square + M_0^2) \tilde{F}_{\mu\nu}^0 - (\partial_\mu \partial_\nu + M_0^2 \gamma_{\mu\nu}) \tilde{F}_\lambda^{0\lambda} = \kappa_f \tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} + O(\kappa_f) \quad (19)$$

Bei Vernachlässigung der Terme $O(\kappa_f)$ folgt hieraus unmittelbar

$$\tilde{F}_\lambda^{0\lambda} = -\frac{\kappa_f}{3M_0^2} \tilde{F}_\lambda^{\text{hadr.}\lambda} \quad (20)$$

D.h. die Divergenzbeziehung (18) reduziert sich im Wechselwirkungsfall i.a. nicht auf die Divergenzfreiheit von $\tilde{F}_{\mu\nu}^0$ selbst, es sei denn die Spur, d.h. der Spin0-Anteil von $\tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}}$ verschwindet. Dies ist der Grund, warum die Relation zwischen dem EIT und dem f-Meson-Feld in der Form (1) angesetzt wurde.

Wir berechnen nun den EIT und setzen in die Definitionsgleichung (17)

$\tilde{\mathcal{L}}_\lambda^{\text{int}}$ ein. Dies liefert zunächst die Beziehung

$$T_{\mu\nu} = \frac{\lambda_f \kappa_f}{M_0^2} \left\{ \tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} - \frac{1}{\kappa_f} G_{\mu\nu}(\tau^0) \right\}$$

die aufgrund der Bewegungsgleichung (14) identisch ist mit der Quelle-Feld-Identität

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (\tilde{F}_{\mu\nu}^0 - \gamma_{\mu\nu} \tilde{F}_\lambda^{0\lambda}) \quad (21)$$

Um die Proportionalitätskonstante λ_f zu bestimmen, geht man ähnlich voran wie im Spin1-Fall: Für einen lokalen, hermiteschen Operator $A_{\mu\nu}$, der symmetrisch in seinen Indizes ist und neben der Divergenzfreiheit gewissen anderen Bedingungen genügt, gilt nämlich nach einem Theorem von Orzalezi et al. 69-72

$$\int d^3x A_{\mu\nu}(x) = c P_{\mu\nu}$$

und

$$\int d^3x (x_\mu A_{0\nu} - x_\nu A_{0\mu}) = c M_{\mu\nu}$$

wobei P_μ und $M_{\mu\nu}$ der Impuls - bzw. Drehimpulsoperator ist und c eine auf Eins normierbare Konstante bedeutet.

Nimmt man nun an, $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}}$ habe die Eigenschaften des Tensoroperators $A_{\mu\nu}$, so läßt sich demnach schreiben:

$$P_\mu = \int \mathcal{F}_{0\mu}^{\text{hadr.}}(x) d^3x \quad (22)$$

Aus der Quelle-Feld-Identität (21) folgt andererseits bei Beachtung der Bewegungsgleichung (19):

$$P_\mu = \int T_{0\mu} d^3x = \frac{\lambda_f \kappa_f}{M_0^2} \int \left\{ \mathcal{F}_{0\mu}^{\text{hadr.}} - \frac{1}{\kappa_f} (\Box F_{0\mu}^\circ - \partial_0 \partial_\mu F_\lambda^\circ{}^\lambda) \right\} d^3x$$

d.h. (wegen (18))

$$P_\mu = \frac{\lambda_f \kappa_f}{M_0^2} \int \mathcal{F}_{0\mu}^{\text{hadr.}}(x) d^3x \quad (23)$$

Der Vergleich mit (22) zeigt, daß man

$$\lambda_f = M_0^2 / \kappa_f$$

setzen kann. Die Quelle-Feld-Identität lautet dann in ihrer endgültigen Form:

$$T_{\mu\nu} = \frac{M_0^2}{\kappa_f} (\mathcal{F}_{\mu\nu}^\circ - \eta_{\mu\nu} \mathcal{F}_\lambda^\circ{}^\lambda) \quad (24)$$

Durch Spurbildung gewinnt man hieraus:

$$T_\lambda^\lambda = -3 \frac{M_0^2}{\kappa_f} \mathcal{F}_\lambda^\circ{}^\lambda$$

Diese Beziehung, die den Spin0-Anteil des EIT mit dem Spin0-Anteil des Tensorfeldes $\mathcal{F}_{\mu\nu}^\circ$ verknüpft, erinnert zwar an die eingangs erläuterte feldtheoretische Formulierung der zusätzlichen Hypothese der Skalarmeson-Dominanz, hat aber in Wirklichkeit nichts mit ihr zu tun, da $\mathcal{F}_\lambda^\circ{}^\lambda$ nicht mit einem physikalischen Spin0-Feld verknüpft ist (s. Gl. (20)). Wie sich in die vorliegende Theorie auch die Hypothese der Skalarmeson-Dominanz einbeziehen läßt, wird Inhalt des nächsten Kapitels sein.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß bei der Anwendung des Theorems von Orzalesi et al. nur sehr allgemeine Eigenschaften des Tensorstromes

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} \equiv \frac{1}{\kappa_f} \frac{\delta \mathcal{L}^{\text{hadr.}}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^\circ)}{\delta \mathcal{F}^{\circ\mu\nu}} \quad (5)$$

eine Rolle spielen, nicht aber dessen detaillierte Struktur. Eine von Raman ⁵ durchgeführte Analyse der mit der Poincaré-Invarianz verträglichen gleichzeitigen Vertauschungsregeln für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors ⁷³ zeigt jedoch, daß die Quelle-Feld-Identität (24) erhebliche Einschränkungen für die Feldabhängigkeit des Quellstroms $\tilde{T}_{\mu\nu}^{hadr}$ bedeutet. Insbesondere zeigt sich, daß $\kappa_f \tilde{T}_{\mu\nu}^{hadr}$ nicht linear in der Kopplungskonstanten κ_f sein kann. Die allgemein kovariante Formulierung der TMD schließlich, die wir im folgenden behandeln werden, fixiert $\tilde{T}_{\mu\nu}^{hadr}$ als den symmetrischen EIT der mit dem nicht-linearen f-Meson-Feld wechselwirkenden Hadronen.

Wir geben hier noch eine alternative, zum Spin-1-Fall analoge f-Meson-Graviton-Kopplung an, die - wie oben bereits erwähnt - nahezu unmittelbar auf den von ISS gemachten Vorschlag für die allgemein kovariante Formulierung einer Lagrangetheorie der TMD führt. Wir spezialisieren uns hierbei auf den Fall, daß $\tilde{T}^{hadr}(F_{\mu\nu}^o)$ in der Form

$$\tilde{T}^{hadr}(F_{\mu\nu}^o) = \kappa_f F^{o\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu}^{hadr} \quad (6)$$

geschrieben werden kann, wobei wiederum

$$\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}^{hadr} = 0 \quad (10)$$

gelten soll. Analog zum Spin-1-Fall, nehmen wir folgende Feldtransformationen vor:

$$\hat{F}_{\mu\nu}^o = F_{\mu\nu}^o + \frac{\kappa_g}{\kappa_f} h_{\mu\nu} \quad (25)$$

und

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{\kappa_g^2}{\kappa_f^2}\right)^{1/2} h_{\mu\nu} \quad (26)$$

und führen die Gravitationskonstante

$$\hat{\kappa}_g = \left(1 - \frac{\kappa_g^2}{\kappa_f^2}\right)^{-1/2} \kappa_g \quad (27)$$

ein.

Ausgedrückt durch die transformierten Größen schreibt sich die Lagrange-funktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_h^{int} \quad (3)$$

wie folgt:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2} \hat{h}_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} \hat{h}_{\varrho\sigma,\tau} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \hat{f}_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} \hat{f}_{\varrho\sigma,\tau}^{\circ} \right\} + \kappa_f \hat{f}_{\mu\nu}^{\circ} \hat{f}_{\mu\nu}^{\text{hadr}} - \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{\kappa_f^2} \left\{ (\kappa_f \hat{f}^{\circ\alpha\beta} - \hat{\kappa}_g \hat{h}^{\alpha\beta}) (\kappa_f \hat{f}^{\circ\gamma\delta} - \hat{\kappa}_g \hat{h}^{\gamma\delta}) (\eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma}) \right\} \quad (28)$$

Die Analogie zum Spin 1-Fall ist auch hier wieder unverkennbar:

Die ursprüngliche Eichtransformation

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \quad (8)$$

überträgt sich auf die transformierten Felder in folgender Weise:

$$\hat{h}_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{h}_{\mu\nu} + \hat{\Lambda}_{\mu,\nu} + \hat{\Lambda}_{\nu,\mu} \quad (8a)$$

und

$$\hat{f}_{\mu\nu}^{\circ} \longrightarrow \hat{f}_{\mu\nu}^{\circ} + \frac{\hat{\kappa}_g}{\kappa_f} (\hat{\Lambda}_{\mu,\nu} + \hat{\Lambda}_{\nu,\mu}) \quad (8b)$$

mit

$$\hat{\Lambda}_{\mu} = \left(1 - \frac{\kappa_g^2}{\kappa_f^2}\right)^{1/2} \lambda_{\mu}$$

Unter dieser kombinierten Eichtransformation ist der Massenterm manifest invariant, während es die übrigen Terme nur bis auf Divergenzen sind. Ferner sieht man, daß das Gravitationsfeld jetzt nur noch an das f-Meson koppelt, während es mit den anderen Hadronen nur über Vermittlung des f-Mesons wechselwirken kann, das seinerseits direkt an die Hadronen koppelt. Dies entspricht, wie wir gleich sehen werden, genau dem von ISS vertretenen Konzept hinsichtlich der Kopplungen des Gravitationsfeldes und des f-Meson-Feldes.

Die Lagrangefunktion (26) erweckt den Eindruck, als beschreibesie zwei massive Felder. Daß dies jedoch nicht der Fall ist, sieht man, wenn man den Massenterm diagonalisiert und die Felder

$$\tilde{f}_{\mu\nu}^{\circ} = \left(1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_f^2}\right)^{-1/2} \left(\hat{f}_{\mu\nu}^{\circ} - \frac{\hat{\kappa}_g}{\kappa_f} \hat{h}_{\mu\nu}\right) \quad (29)$$

und

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_f^2}\right)^{-1/2} \left(\hat{f}_{\mu\nu}^{\circ} + \frac{\hat{\kappa}_g}{\kappa_f} \hat{h}_{\mu\nu}\right) \quad (30)$$

eingführt.

Bei Benutzung dieser Felder geht die Lagrangefunktion (15) über in

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \tilde{h}_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} \tilde{h}_{\varrho\sigma,\tau} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu,\lambda}^{\circ} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} \tilde{F}_{\varrho\sigma\tau}^{\circ} - \frac{1}{2} \tilde{M}_0^2 (\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} \tilde{F}^{\circ\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu}^{\circ\alpha} \tilde{F}_{\alpha}^{\circ\mu\nu}) \\ & + \tilde{\kappa}_f \tilde{F}^{\circ\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} + \tilde{\kappa}_g \tilde{h}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} \end{aligned} \quad (31)$$

mit der Masse

$$\tilde{M}_0 = \left(1 + \frac{\hat{\kappa}_f^2}{\kappa_f^2}\right)^{1/2} M_0$$

und den Kopplungskonstanten

$$\tilde{\kappa}_f = \left(1 + \frac{\hat{\kappa}_f^2}{\kappa_f^2}\right)^{-1/2} \kappa_f$$

und

$$\tilde{\kappa}_g = \left(1 + \frac{\hat{\kappa}_g^2}{\kappa_g^2}\right)^{-1/2} \kappa_g$$

Wie man sieht, enthält die Theorie tatsächlich nur ein massives und ein masseloses Feld, nämlich das Mesonfeld $\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ}$ und das Gravitationsfeld $\tilde{h}_{\mu\nu}$.

§ 3 Allgemein kovariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz nach Salam

Die im vorigen Abschnitt dieses Kapitels behandelte, lorentzinvariante Lagrangetheorie der TMD besitzt den Nachteil, von einer inkonsistenten Gravitationstheorie ausgegangen zu sein, indem sie sich von vornherein auf schwache Gravitationsfelder beschränkte und so den typisch nicht-linearen Charakter der ART umging. Es stellt sich daher die Frage, ob es möglich ist, eine allgemeine kovariante Lagrangetheorie der TMD zu formulieren, die bei Linearisierung in die von Raman entwickelte, lorentzinvariante Theorie übergeht.

Diese Frage konnte in den oben zitierten Arbeiten von ISS⁶ und WZ⁷ positiv beantwortet werden. Beide Arbeiten stimmen - wie in der Einleitung bereits festgestellt - im Kern überein, jedoch benutzen ISS den konventionellen Tensorformalismus der ART, während WZ den Vierbeinformalismus verwenden. Da wir von letzterem nur Gebrauch machen werden, wenn wir die Kopplung von Tensormesonen an Baryonen besprechen, und sonst die Sprache des üblichen Tensorformalismus verwenden werden, beschränken wir uns darauf allein auf die Arbeit von ISS einzugehen.

Die in dieser Arbeit formulierte Theorie ist eine allgemeine kovariante Theorie mit zwei symmetrischen, selbstwechselwirkenden Tensorfeldern $g_{\mu\nu}$ und $f_{\mu\nu}$. Während $g_{\mu\nu}$ mit dem Einsteinschen Gravitationsfeld identisch ist, stellt $f_{\mu\nu}$ ein massives Tensorfeld dar, das ebenso wie $g_{\mu\nu}$ als metrisches Feld interpretiert wird und dasselbe Transformationsverhalten wie $g_{\mu\nu}$ besitzt. Dementsprechend setzen ISS für den kinetischen Anteil der Lagrangedichte des freien f-Feldes einen Ausdruck an, der dieselbe Struktur besitzt wie die Lagrangedichte des freien g-Feldes, nämlich

$$\mathcal{L}_f^0 = \frac{1}{2\kappa_f^2} \sqrt{-f} f^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(f) \quad (1)$$

Dabei ist die Kopplungskonstante κ_f in Analogie zu

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2\kappa_g h_{\mu\nu}(x) \quad (2)$$

durch

$$f_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - 2\kappa_f F_{\mu\nu}^0 \quad (3)$$

definiert ist, und auch die Größen f , $f^{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu}(f)$ sind wie üblich definiert, d.h.

$$f \equiv \det f_{\mu\nu}, \quad f_{\mu\lambda} f^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (4)$$

und

$$R_{\mu\nu}(f) = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}(f) \quad (5)$$

wobei der "Krümmungstensor" $R^{\beta}_{\mu\alpha\nu}(f)$ analog zu (6) aus Kap. I, §1.1 aus den Christoffelsymbolen

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(f) = \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} (f_{\beta\mu,\nu} + f_{\beta\nu,\mu} - f_{\mu\nu,\beta}) \quad (6)$$

zu bilden ist.

Die entscheidende Annahme ist nun die, daß das Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ an den EIT der leptonischen Materie koppelt (mit der Kopplungskonstanten κ_g), während das Tensorfeld $f_{\mu\nu}$ mit einer durch die Kopplungskonstante κ_f charakterisierten Stärke an den EIT der Hadronen koppelt. Die gravitäre Wechselwirkung zwischen Leptonen und Hadronen geschieht über Vermittlung des f -Feldes in Form einer direkten f - g -Kopplung.

Die Lagrangedichte, die ISS ihrer Theorie zugrundelegen, ist dementsprechend gegeben durch

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{fg} \quad (7)$$

mit

$$\mathcal{L}_f = \sqrt{-f} \left\{ \frac{1}{2\kappa_f^2} R(f) + L(\text{had.}, f) \right\} \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_g = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa_g^2} R(g) + L(\text{lep.}, g) \right\} \quad (9)$$

und dem Kopplungstermen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fg} &= \frac{M_0^2}{8\kappa_f^2} \sqrt{-f} \left\{ (f^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta})(f^{\gamma\delta} - g^{\gamma\delta})(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \right\} \\ &= \frac{M_0^2}{8\kappa_f^2} \sqrt{-f} \left\{ f^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} f^{\gamma\delta} g_{\delta\alpha} - (f^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta})^2 + 6 f^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - 12 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Die Ausdrücke $\sqrt{-f} L(\text{had.}, f)$ und $\sqrt{-g} L(\text{lep.}, g)$ stellen die mit der f - bzw. g -Metrik kovariantisierten Lagrangedichten der Hadronen bzw.

Leptonen dar, enthalten also die Kopplung des f -Feldes an die Hadronen und die des g -Feldes an die Leptonen. Bei Linearisierung gehen sie über in

$$L(\text{hadr.}) + \kappa_f T_{\mu\nu}(\text{hadr.}) F^{\mu\nu} \quad (11)$$

bzw.

$$L(\text{lept.}) + \kappa_g T_{\mu\nu}(\text{lept.}) h^{\mu\nu} \quad (12)$$

wobei $T_{\mu\nu}(\text{hadr.})$ und $T_{\mu\nu}(\text{lept.})$ die symmetrischen Belinfante-Tensoren der hadronischen bzw. leptonischen Materie darstellen.

Die reinen f - und g -Anteile von $\mathcal{L}_f$ bzw. $\mathcal{L}_g$ stimmen in nullter Ordnung von κ_f bzw. κ_g offensichtlich mit den beiden kinetischen Termen der Lagrangefunktion (28) aus § 2 dieses Kapitels überein.

Der Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{fg}$ ist so konstruiert, daß er sich unter allgemeinen Koordinatentransformationen wie eine skalare Dichte verhält und bei Linearisierung in nullter Ordnung der Kopplungskonstanten κ_f und κ_g den Fierzschen Massenterm eines Spin 2-Teilchens liefert, während die Terme von erster und zweiter Ordnung in κ_g/κ_f die gleiche Struktur besitzen, wie die zu $\hat{\kappa}_g/\kappa_f$ bzw. $\hat{\kappa}_g^2/\kappa_f^2$ proportionalen Terme, die in der Lagrangefunktion (28) aus § 2 dieses Kapitels auftreten. Die Wahl von $\mathcal{L}_{fg}$ ist zwar nicht eindeutig, denn anstelle von $\sqrt{-F}$ hätte man auch $\sqrt{-g}$ benutzen können und statt mit $g_{\mu\nu}$ hätte die Kontraktion auch mit $f_{\mu\nu}$ durchgeführt werden können. Jedoch würde sich $\mathcal{L}_{fg}$ auch in diesem Fall in nullter Ordnung von κ_f und κ_g auf einen Fierzschen Massenterm reduzieren, und auch die anderen zuvor genannten Eigenschaften von $\mathcal{L}_{fg}$ blieben weiterhin erhalten.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß die obige Lagrangefunktion (7) nichts anderes ist als die allgemein kovariante Version der im vorigen Abschnitt dieses Kapitels angegebenen Lagrangefunktion (28), wenn man den dort auftretenden Strom $J_{\mu\nu}^{\text{hadr.}}$ mit dem Belinfante-Tensor der Hadronen identifiziert und von den dort nicht betrachteten Leptonen einmal absieht.

Die Variation der Lagrangefunktion (7) nach den Feldern $f_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ führt zu den Bewegungsgleichungen

$$G_{\mu\nu}(f) = -\kappa_f^2 \left\{ T_{\mu\nu}(\text{had.}, f) + \frac{1}{f-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{f\bar{g}}}{\partial f^{\mu\nu}} \right\} \quad (13)$$

und

$$G_{\mu\nu}(g) = -\kappa_g^2 \left\{ T_{\mu\nu}(\text{lept.}, g) + \frac{1}{f-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{f\bar{g}}}{\partial g^{\mu\nu}} \right\} \quad (14)$$

mit den durch

$$T(\text{had.}, f) = \frac{2}{f-g} \frac{\delta(\sqrt{f-g} L(\text{had.}, f))}{\delta f^{\mu\nu}} \quad (15)$$

und

$$T(\text{lept.}, g) = \frac{2}{f-g} \frac{\delta(\sqrt{f-g} L(\text{lept.}, g))}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (16)$$

definierten Energie-Impuls-Tensoren der Hadronen bzw. Leptonen.

Die Beiträge des Mischungsterm $\mathcal{L}_{f\bar{g}}$ sind explizit gegeben durch

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{f\bar{g}}}{\partial f^{\mu\nu}} = \left(-\frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} \mathcal{L}_{f\bar{g}} + \frac{M_0^2}{4\kappa_f} F_{\mu}^{\alpha} \right) f_{\alpha\nu} \quad (17)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{f\bar{g}}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{M_0^2}{4\kappa_f} F_{\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} \quad (18)$$

wobei die Größe F_{μ}^{α} eine Abkürzung ist für die Kombination

$$F_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2\kappa_f} \left\{ (g_{\mu\beta} f^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} f^{\delta\alpha}) - (g_{\mu\beta} f^{\beta\alpha})(g_{\gamma\delta} f^{\gamma\delta} - 3) \right\} \sqrt{f-g} \quad (19)$$

Man überzeugt sich leicht, daß F_{μ}^{α} für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ in nullter Ordnung von κ_f mit dem Ausdruck

$$\eta^{\alpha\gamma} (F_{\mu\nu}^{\circ} - \eta_{\mu\nu} \eta^{\beta\gamma} F_{\beta\delta}^{\circ})$$

identisch ist und somit als interpolierendes Feld eines massiven Spin-2-Teilchens betrachtet werden kann. Die Bewegungsgleichung (13) des f -Feldes kann nun auf eine Form gebracht werden, die die Struktur einer Quelle-Feld-Identität besitzt. Dazu definiert man in Analogie zu Gl. (19) aus Kapitel I, §1.1 den "Energie-Impuls-Komplex"

$$\mathcal{V}_{\mu}^{\nu}(f) = \sqrt{f-g} [T_{\mu}^{\nu}(\text{had.}, f) + \mathcal{V}_{\mu}^{\nu}(f)] \quad (20)$$

mit dem Pseudotensor der "starken Gravitation"

$$\mathcal{V}_{\mu}^{\nu}(f) = \frac{1}{2\kappa_f^2} \left\{ A(f) \delta_{\mu}^{\nu} - \frac{\partial A(f)}{\partial f^{\alpha\gamma}} f_{\alpha\gamma} \right\} \quad (21)$$

wo $A(f)$ analog zu Gl.(20) aus Kap.I, § 1.1 gegeben ist durch

$$A(f) = f^{\mu\nu} \{ \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} (f) \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} (f) - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} (f) \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} (f) \} \quad (22)$$

Bei Berücksichtigung der Bewegungsgleichung (13) läßt sich für Gl.(20) auch schreiben

$$\Theta_{\mu}^{\nu}(f) = \sqrt{-f} \left[-\frac{1}{\kappa_f^2} G_{\mu}^{\nu}(f) + t_{\mu}^{\nu}(f) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{fg}}{\partial f^{\mu\lambda}} f^{\lambda\nu} \quad (23)$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck, multipliziert mit $\sqrt{-f}$, ist nach Gl.(27) bzw. (25) aus Kap.I, § 1.1 identisch mit der Divergenz des von Freud-
schen Superpotentials

$$U_{\mu}^{[\nu\alpha]}(f) = \frac{1}{2\kappa_f^2} \{ (-f)^{-1/2} f_{\mu\beta} [f(f^{\nu\kappa} f^{\alpha\beta} - f^{\alpha\kappa} f^{\nu\beta})]_{,\kappa} \} \quad (24)$$

Setzt man dies in Gl.(23) ein, so erhält man bei Beachtung von (17) die Beziehung

$$\Theta_{\mu}^{\nu}(\text{hadr.}, f) = \frac{M_0^2}{\kappa_f} F_{\mu}^{\nu}, \quad (25)$$

wobei die Größe $\Theta_{\mu}^{\nu}(\text{hadr.}, f)$ definiert ist durch

$$\dot{\Theta}_{\mu}^{\nu}(\text{hadr.}, f) = \Theta_{\mu}^{\nu}(f) - U_{\mu}^{[\nu\alpha]}(f) - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}_{fg} \quad (26)$$

Gleichung (25) besitzt offensichtlich die Struktur einer Strom-Feld-Identität.

Daß im Modell von ISS auch die ursprüngliche Strom-Feld-Identität (24) aus § 2 dieses Kapitels reproduziert wird, erkennt man, wenn man das Gravitationsfeld als äußeres Feld betrachtet und in die Definition des Belinfante-Tensors

$$T_{\mu\nu} = \left[\frac{2}{f-g} \frac{\delta(\sqrt{-g} L(\psi, g))}{\delta g^{\mu\nu}} \right] g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$$

für $L(\psi, g)$ den Ausdruck $\mathcal{L}_{fg}/\sqrt{-f}$ einsetzt. Bei Beachtung von (18) erhält man dann in niederster Ordnung von κ_f unmittelbar

$$T_{\mu\nu} = \frac{M_0^2}{\kappa_f} (F_{\mu\nu}^{\circ} - \gamma_{\mu\nu} F_{\lambda}^{\circ\lambda}) \quad (27)$$

§ 4 Die f-g-Theorie als zwei Tensor-Theorie der Gravitation

(Konsistenz, Lösungen, Alternativen)

Bereits in der Einleitung hatten wir darauf hingewiesen, daß die unter dem Blickwinkel der Elementarteilchenphysik entstandene Theorie von ISS auch für die ART von großer Bedeutung ist, da sie - als klassische Feldtheorie der Gravitation aufgefaßt - eine Modifizierung der Einsteinschen Gravitationstheorie darstellt. Daraus erklärt es sich, daß besonders auch "Relativisten", die sich vornehmlich mit Problemen der Gravitation und Kosmologie beschäftigen, ihr Augenmerk auf diese Theorie gerichtet haben. Die wichtigsten Beiträge, die diese Autorengruppe zur Theorie von ISS geliefert haben, sollen an dieser Stelle näher erläutert werden.

Die Idee einer bi-metrischen Theorie der Gravitation - wie sie die Theorie von ISS darstellt, wenn man sie als klassische Feldtheorie der Gravitation interpretiert - geht bereits auf eine Überlegung von Lubkin ⁷⁴ aus dem Jahre 1966 zurück. Nach ihr sollte die Raum-Zeit-Struktur in mikroskopischen Bereichen von 10^{-13} cm nicht durch das übliche, masselose Gravitationsfeld beschrieben werden, sondern durch das Feld eines massiven Spin-2-Teilchens, das nicht nur an den EIT der mit ihm wechselwirkenden Felder koppelt, sondern auch an seinen eigenen.

Wie Gupta ⁴⁴ gezeigt hat, wird ein solches Feld - ähnlich dem Einsteinschen Gravitationsfeld - durch eine transzendente, nicht-polynomiale Lagrange-funktion beschrieben. Hat es eine Masse, so fällt es vom Mittelpunkt seiner Quelle wie ein Yukawa-Potential e^{-mr}/r nach außen hin ab, d.h. seine Wirkung ist außerhalb einer Kugel vom Radius m^{-1} vernachlässigbar gering. Die Raum-Zeit Struktur wird hier also im wesentlichen vom herkömmlichen, masselosen Gravitationsfeld bestimmt. Für die Bewegung makroskopischer Körper spielt daher das massive, kurzreichweitige Gravitationsfeld überhaupt keine Rolle.

Eigenartigerweise war es die Elementarteilchenphysik, die den Anstoß dazu gab, eine Theorie zu entwickeln, in welcher sich die Idee von Lubkin widerspiegelt. Diese Theorie, nämlich die f-g-Theorie der Gravitation von ISS, wurde kurz nach ihrem Entstehen von verschiedenen Autoren ⁸⁻¹⁵ auf Konsistenz und Lösungen hin untersucht. An erster Stelle ist in diesem Zusammenhang

eine Arbeit von Lawrence und Toton⁸ zu nennen, in der u.a. gezeigt wird, daß die Bewegungsgleichungen der Theorie von ISS den Feldern $g_{\mu\nu}$ und f_a die richtige Anzahl von Eichbedingungen auferlegen. Differenziert man nämlich diese beiden Gleichungen (d.h. Gl.(13) und (14) aus dem vorigen Abschnitt) kovariant bezüglich der f - bzw. g -Metrik, so erkennt man bei Berücksichtigung der in beiden Metriken gültigen Bianchi-Identitäten $G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$, daß die differentiellen Erhaltungssätze

$$T_{\mu\nu}(hadt., f)_f^{;\nu} = 0 \quad \text{und} \quad T_{\mu\nu}(hpt., g)_g^{;\nu} = 0 \quad (1,2)$$

erfüllt sind, wenn

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}_{fg}}{\delta f^{\mu\nu}} \right)_f^{;\nu} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{fg}}{\delta g^{\mu\nu}} \right)_g^{;\nu} = 0 \quad (3,4)$$

gilt. Diese Gleichungen scheinen insgesamt acht unabhängige Bedingungen darzustellen. Da aber $\mathcal{L}_{fg}$ eine skalare Dichte ist, muß die Summe der Ausdrücke auf der linken Seite von Gl.(3) und (4) identisch verschwinden. Um dies einzusehen, braucht man nur eine infinitesimale Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ vorzunehmen und zu berücksichtigen, daß sich die Variationen von $\mathcal{L}_{fg}$ nach $f^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ wie Tensordichten verhalten. Setzt man dementsprechend

$$\delta \mathcal{L}_{fg} / \delta f^{\mu\nu} = \sqrt{-f} A_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \delta \mathcal{L}_{fg} / \delta g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} B_{\mu\nu}$$

so folgt aufgrund von

$$\delta f^{\mu\nu} = (\xi^\nu)_f^{;\mu} + (\xi^\mu)_f^{;\nu} \quad \text{und} \quad \delta g^{\mu\nu} = (\xi^\nu)_g^{;\mu} + (\xi^\mu)_g^{;\nu}$$

aus

$$0 = \delta \int \mathcal{L}_{fg} d^4x = \int (A_{\mu\nu} \sqrt{-f} \delta f^{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}) d^4x$$

unmittelbar

$$0 = 2 \int \{ (A_{\mu\nu})_f^{;\nu} \sqrt{-f} + (B_{\mu\nu})_g^{;\nu} \sqrt{-g} \} d^4x$$

und damit die obige Behauptung. Somit reduzieren sich die anscheinend acht unabhängigen Gleichungen (3) und (4) auf die richtige Anzahl von nur vier Eichbedingungen. Dies war auch zu erwarten, da die Theorie bei Linearisierung und anschließender Diagonalisierung der Felder nur ein massives Tensorfeld enthält, dessen Spin-1-Anteil gerade durch die vier Nebenbedingungen

$$\partial^\nu (F_{\mu\nu}^\alpha - \eta_{\mu\nu} F^\alpha{}_\lambda) = 0 \text{ eliminiert wird.}$$

Im Gegensatz zu der Tatsache, daß die Theorie von ISS den Feldern $f_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ die richtige Zahl von Eichbedingungen auferlegt, mußten Lawrence und Toton gleichzeitig feststellen, daß die volle, d.h. allgemein kovariante Theorie von ISS im wechselwirkungsfreien Fall insgesamt acht (6+2) Freiheitsgrade enthält und nicht nur sieben (5+2) wie die linearisierte Theorie. Um dies zu zeigen, wandten sie den aus der ART bekannten Arnowitt-Deser-Misner (ADM)-Formalismus²⁵ auf die f-g-Theorie an und nahmen für diese eine analoge (3+1)-dimensionale Raum-Zeit-Zerlegung vor. Es zeigt sich dann, daß das Auftreten eines zusätzlichen, achten Freiheitsgrades auf die im Massenterm $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ enthaltenen Nicht-Linearitäten zurückzuführen ist. Auf diese Diskrepanz zwischen der allgemein kovarianten und linearisierten Version der f-g-Theorie von ISS hat später noch einmal Aichelburg¹¹ ausdrücklich hingewiesen. In einer Arbeit, in der er die Implikationen der als klassische Gravitationstheorie interpretierten f-g-Theorie untersuchte, wies er u.a. nach, daß die von Lawrence und Toton vorgenommene (3+1)-dimensionale Zerlegung bei Linearisierung der Theorie tatsächlich eine Nebenbedingung mehr liefert als im allgemein kovarianten Fall, so daß sich die Zahl der unabhängigen Variablen auf sieben reduziert.

Die soeben zitierte Arbeit von Aichelburg enthält auch einen Überblick über die von ihm selbst und anderen Autoren¹²⁻¹⁴ gefundenen Lösungen der Feldgleichungen der f-g-Theorie. Zu den Schwierigkeiten, die bereits bei der Lösung der Einsteinschen Gleichungen auftreten, kommt im Fall der f-g-Theorie noch die Kopplung der beiden Felder $f_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ hinzu, welche durch den Massenterm $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}$ verursacht wird. Um dieses Problem zu vereinfachen, fordert man zunächst gewisse algebraische Relationen $f_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$. Die einfachste solcher Relationen ist natürlich $f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, für welche der Mischungsterm verschwindet und man die Einsteinschen Lösungen erhält. Die Verallgemeinerung dieser Relation auf $f_{\mu\nu} = \alpha(x) g_{\mu\nu}$ führt zu k e i n e m neuen Ergebnis, da nach einem - in der Arbeit von Aichelburg zitierten - Theorem von Pirani die einzigen Lösungen mit $f_{\mu\nu} = \alpha(x) g_{\mu\nu}$ diejenigen mit $\alpha(x)=1$ sind. Die bisher bekannten Lösungen sind durch die Relation

$$f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \pm l_{\mu} l_{\nu} \quad (5)$$

charakterisiert, wobei ℓ_μ ein Nullvektorfeld bzgl. g ist:

$$g^{\mu\nu} \ell_\mu \ell_\nu = 0$$

und somit auch bzgl. f :

$$f^{\mu\nu} \ell_\mu \ell_\nu = 0$$

Für das Vakuum ($T_{\mu\nu}(\text{hadr.}, f) = 0 = T_{\mu\nu}(\text{lept.}, g)$) erhält man im einfachsten Fall ($\ell_\mu \sim \delta_{0\mu}$) zwei ebenfrontige Wellen mit parallelen Strahlen (sog. pp-Wellen), die sich in Richtung von ℓ_μ forpflanzen. Kugelsymmetrische Vakuumlösungen, die die Relation (5) erfüllen, konnten dagegen nicht gefunden werden.

Allerdings gelang es Chela-Flores und Aragone^{9,10}, eine kugelsymmetrische Lösung anzugeben für den Fall, daß $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und $\kappa_g = 0$ sind und somit nur die Feldgleichung für die starke f -Metrik zu lösen bleibt. Sie erhielten eine exakte Lösung in Form einer Potenzreihe, die das erwartete Abfallverhalten eines Yukawa-Potentials zeigt. Auch gelang es Chela-Flores und Aragone, einen Ausdruck für den Energieinhalt des f -Feldes in einer Kugel um eine hadronische Punktmasse M herzuleiten. Er lautet:

$$P_0 = M M_0 R \exp(-M_0 R)$$

wobei R der Radius der Kugel ist, die die Punktmasse M umgibt. Für $R \approx 10^{-13} \text{ cm}$ und $M_0 \approx 10^3 \text{ MeV}$ ergibt sich hieraus in Übereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie:

$$P_0 \approx M$$

Die Untersuchung des Nicht-Vakuum-Falles liefert bisher nur zwei nennenswerte Ergebnisse. Aichelburg¹⁵ studierte die f - g -Theorie für den - nicht gerade realistischen - Fall, daß das g -Feld an den EIT eines Spin 1/2 (Neutrino)-Strahlungsfeldes koppelt, während die Quelle des f -Feldes verschwindet. Man würde natürlich erwarten, daß die leptonische Quelle, d.h. der EIT des Spin 1/2-Strahlungsfeldes, ein g -Feld erzeugt und über die f - g -Kopplung ein f -Feld. Kurioserweise aber findet man nur dann eine exakte Lösung, wenn die g -Metrik flach ist und die f -Metrik gekrümmt.

D.h. man hat es hier mit dem eigenartigen Fall zu tun, daß

$$R_{\mu\nu\sigma\zeta}(g) = 0, \text{ aber } T_{\mu\nu}(\text{lept.}, g) \neq 0$$

und

$$R_{\mu\nu\sigma\zeta}(f) \neq 0, \text{ aber } T_{\mu\nu}(\text{hadr.}, f) = 0$$

ist. M. a. W. zwischen einem Testlepton und einem leptonischen Strahlungsfeld gibt es in diesem Fall **keine** gravitäre Wechselwirkung.

In diesem Zusammenhang möchten wir noch auf eine Arbeit von Salam und Mitarbeitern ^{75,76} hinweisen, in der aus der als Gravitationstheorie interpretierten f-g-Theorie Konsequenzen für ein von Trautmann ⁷⁷ entwickeltes kosmologisches Modell gezogen werden. Dieses Modell ist Singularitäten-frei, und der Gravitationskollaps eines Universums mit 10^{80} Neutronen wird in ihm durch Paralleleinstellung der Neutronenspins und Berücksichtigung der Cartanschen Torsion verhindert. Der minimale Radius dieses Universums hat die Länge von 1 cm. Dieser Radius, der einer Dichte von ungefähr $10^{55} \text{ g cm}^{-3}$ (!!) entspricht, kann - wie Salam et al. gezeigt haben - durch den Einfluß des kurzreichweitigen f-Gravitationsfeldes auf 10^{13} cm erhöht werden.

Neben den hier erläuterten Untersuchungen hat es auch eine interessante Alternative zur Salamschen f-g-Theorie gegeben. Und zwar haben Aichelburg und Mansouri ¹⁶⁻¹⁷ den Vorschlag gemacht, die nicht-kovariante massive Gravitationstheorie von Freund et al. ⁷⁸ dadurch zu kovariantisieren, daß man in dem Massenterm

$$\mathcal{L}_m = m^2 \left\{ \sqrt{-g} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} + 1 \right\}$$

das absolute Objekt $\eta_{\mu\nu}$ durch ein dynamisches Objekt $h_{\mu\nu}$ (welches $f_{\mu\nu}$ entspricht) ersetzt. Der Wechselwirkungsterm zwischen $g_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ lautet dann:

$$\mathcal{L}_m = m^2 \left\{ \sqrt{-g} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} + \sqrt{-h} \right\}$$

während die volle Lagrangefunktion durch

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_{g,h}$$

gegeben ist, wobei $\mathcal{L}_g$ und $\mathcal{L}_h$ beide vom Einsteinschen Typ sind. Die ents tehende Theorie hat zwar die Struktur der Salamschen Theorie, un- terscheidet sich aber von ihr dadurch, daß sowohl ihre allgemein ko- variante als auch ihre linearisierte Version acht (=6+2) Freiheitsgrade enthalten. D.h. das massive, nicht-wechselwirkende Tensorfeld, das man nach Linearisierung durch eine geeignete Felddiagonalisierung er- hält, besitzt noch eine zusätzliche Spin0-Komponente. Es ist interessant festzustellen, daß der oben angegebene Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{g,h}$ von ähn- licher Struktur ist, wie eine von ISS⁶ angegebene, zu $\mathcal{L}_{fg}$ alternative f-g-Kopplung, nämlich

$$\mathcal{L}'_{fg} = \lambda \sqrt{-g} + \lambda' \sqrt{-f} + \mu \sqrt{-f}^\alpha \sqrt{-g}^\beta \sqrt{-\det \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + g_{\mu\nu})}^\gamma$$

Hierbei sind μ, α, β und γ Parameter, die durch die "kosmologischen" Konstanten λ und λ' ausgedrückt werden können, wenn man fordert, daß die Lagrangetheorie nach Linearisierung keine in den Feldern $F_{\mu\nu}^0$ und $h_{\mu\nu}$ linearen Terme enthält und daß das wechselwirkungsfreie, massive Tensor- feld ein reines Spin2-Feld ist. Diese letzte Forderung läßt sich in der Theorie von Aichelburg n i c h t erfüllen, weil bereits in der Theorie von Freund et al., auf die sich Aichelburg stützt, das massive Gravita- tionsfeld auch im wechselwirkungsfreien Fall eine Spin0-Komponente ent- hält.

In diesem Zusammenhang sei schließlich eine Arbeit von Maheshwari¹⁸ erwähnt, die auf einer von Ogievetsky und Polubarinow⁷⁹ entwickelten Feldtheorie eines massiven, selbstwechselwirkenden Tensorfeldes im flachen Raum aufbaut. (Diese Theorie versteht sich, wohlbemerkt, n i c h t als massive Gravitationstheorie, wenngleich sich auch Freund et al.⁷⁸ - ihrer Struktur nach - auf sie gestützt haben!). Maheshwari ist es gelungen, die Bewegungsgleichung dieses universell koppelnden Tensorfeldes auf eine Art Quelle-Feld-Identität zu reduzieren, wie sie uns aus der all- gemein kovarianten Theorie von ISS bekannt ist. Darüberhinaus behauptet

Maheshwari, mit seiner Arbeit gezeigt zu haben, daß der von ISS angegebene f-g-Mischungsterm eindeutig fixiert werden kann durch die Forderung, daß das in der freien, linearisierten Theorie auftretende, massive Tensorfeld ein reines Spin2-Feld sei. Diese Behauptung ignoriert jedoch verschiedene Tatbestände: Erstens ist die der Arbeit von Maheshwari zugrunde liegende Theorie von Ogievetsky und Polubarinov eine Theorie für ein selbstwechselwirkendes, massives Tensorfeld, in der das Gravitationsfeld überhaupt nicht auftritt, so daß sie mit der f-g-Theorie von ISS überhaupt nicht verglichen werden kann. Außerdem enthält die Theorie von Ogievetsky und Polubarinov i.a. noch einen nicht-verschwindenden Spin0-Freiheitsgrad, der nur durch eine geeignete Wahl der in der Theorie auftretenden Parameter eliminiert werden kann. Und im übrigen ist zu bemerken, daß auch ISS von der Forderung ausgehen, daß sich der Mischungsterm in nullter Ordnung der Kopplungskonstanten κ_f und κ_g auf den Fierzschen Massenterm eines Spin2-Teilchens reduziert, jedoch stellen sie zu Recht fest, daß diese Forderung allein die Struktur von χ nicht eindeutig bestimmt. Die oben zitierte Behauptung von Maheshwari ist daher höchst uneinsichtig.

Mit dieser kritischen Bemerkung schließen wir die Übersicht über die gravitationstheoretisch orientierten Beiträge zur Theorie von ISS ab.

K A P I T E L III

Lagrangetheorie der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz

Wir kommen nunmehr zum Hauptteil unserer Arbeit, in dem gezeigt werden soll, wie sich die oben dargestellten Lagrangetheorien von Raman bzw. Salam et al. erweitern lassen, um auch der Hypothese der SMD Rechnung zu tragen. Danach werden wir untersuchen, welche experimentellen Konsequenzen sich aus der erweiterten Theorie ergeben.

§ 1. Einbeziehung der Skalarmesonon-Dominanz in die lorentzinvariante Lagrangetheorie der Tensormesonon-Dominanz von Raman

Die von Raman hergeleitete Quelle-Feld-Identität

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (F_{\mu\nu}^0 - \gamma_{\mu\nu} F_{\lambda}^{0\lambda}) \quad (1)$$

impliziert eine Proportionalität zwischen dem Spin0-Anteil des EIT und dem des Tensorfeldes $F_{\mu\nu}^0$:

$$T_{\lambda}^{\lambda} = -3\lambda_f F_{\lambda}^{0\lambda} \quad (2)$$

Man könnte daher versucht sein, die SMD dadurch in die Ramansche Theorie einzubauen, daß man die Lagrangefunktion des F-Feldes so modifiziert, daß sowohl sein Spin2- wie sein Spin0-Anteil physikalische Teilchen mit dem Spin 2 bzw. Spin 0 und inäquivalenten Massen beschreiben. Entsprechende Lagrangefunktionen sind in der Tat von verschiedenen Autoren konstruiert worden^{79,80}, jedoch besitzt in diesen Fällen stets eines der beiden Teilchen negative Energie. Daher sind solche Lagrangefunktionen physikalisch nicht akzeptabel. Wir führen deswegen in die Ramansche Theorie *e x p l i z i t* ein isoskalares Spin0-Feld ϵ^0 ein, das wir vorläufig mit dem Feld einer bei 700 MeV vermuteten $\pi\pi$ -Resonanz identifizieren.

Will man - wie wir es hier tun wollen - an der einfachen Struktur der Quelle-Feld-Identität (1) festhalten, und gleichzeitig erreichen, daß deren Spurbildung zu der Beziehung

$$T_{\lambda}^{\lambda} = \lambda_{\epsilon} \epsilon^0 \quad (3)$$

führt, so wird man natürlich das Feld ε^0 in bestimmter Weise an das Tensorfeld F_{μ}^{α} zu koppeln haben, damit $F_{\mu}^{\alpha} \sim \varepsilon^0$ wird.

Wie bereits in der Einleitung betont, kann die Relation (3) verschieden interpretiert werden. Sie kann entweder als Ausdruck der gebrochenen Skaleninvarianz gedeutet werden oder aber als Quelle-Feld-Identität, die die Quelle eines möglicherweise existierenden skalaren Gravitationsfeldes, nämlich T^{λ}_{λ} , mit einem massiven Spin0-Feld verknüpft.

Wir wollen hier den zweiten Standpunkt einnehmen und führen daher in die Theorie von Raman neben dem massiven Skalarfeld ε^0 ein masseloses Skalarfeld χ ein, das die Rolle eines skalaren Gravitons spielt und an die Spur des EIT koppelt. D.h. wir legen unserem Modell nicht die (lineare) Einsteinsche Gravitationstheorie zugrunde, sondern diejenige von Brans und Dicke, genauer gesagt: die zweite Version der in Kap. II, §2.2 umrissenen, linearen Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung. Im übrigen bedienen wir uns weitgehendst des Ramanschen Modells, indem wir annehmen, daß zu der von ihm konstruierten Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_h^{int} \quad (4)$$

nur Terme hinzutreten, die der Anwesenheit des ε^0 -Feldes und des Spin0-Gravitons Rechnung tragen. Insbesondere muß unter diesen Termen auch die oben erwähnte Kopplung zwischen dem F^0 - und dem ε^0 -Feld auftreten. Wir schreiben also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_h^{int} + \mathcal{L}_\varepsilon + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_\chi^{int} + \mathcal{L}_{\varepsilon\chi} \quad (5)$$

Die Terme $\mathcal{L}_f$ und $\mathcal{L}_h$ bedeuten hierbei die Lagrangefunktionen der mit den Hadronen wechselwirkenden, massiven Felder $F_{\mu\nu}^0$ und ε^0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu,\lambda,\alpha\alpha\tau} F_{\alpha\alpha\tau}^0 - \frac{1}{2} M_0^2 (F_{\mu\nu}^0 F^{0\mu\nu} - F_{\mu}^0 F^{0\mu}) + g_f F_{\mu\nu}^{hadr} F^{0\mu\nu} \\ \mathcal{L}_h &= \frac{1}{2} \varepsilon_{,\lambda}^0 \varepsilon^{0,\lambda} - \frac{1}{2} m_0^2 \varepsilon^{02} + g_\varepsilon F_{\lambda}^{hadr\lambda} \varepsilon^0 \end{aligned} \quad (6,7)$$

wobei wir annehmen, daß das ε^0 -Feld an die Spur desselben Stromes koppelt,

an den auch das F^0 -Feld koppelt, und daß wiederum

$$\partial^\mu \tilde{f}_{\mu\nu}^{\text{had.}} = 0 \quad (8)$$

erfüllt ist. Die Größen $\mathcal{L}_h$ und $\mathcal{L}_\xi$ stellen die Lagrangefunktionen der beiden Gravitationsfelder $h_{\mu\nu}$ und ξ dar:

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \rho\sigma\tau} h_{\rho\sigma,\tau} \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2} \xi_{,\lambda} \xi^{,\lambda} \quad (10)$$

Dagegen beschreiben die Lagrangefunktionen $\mathcal{L}_h^{\text{int}}$ und $\mathcal{L}_\xi^{\text{int}}$ die Wechselwirkung der beiden Gravitationsfelder $h_{\mu\nu}$ und ξ mit den Materiefeldern F^a und ε^a und den Feldern jener Hadronen, an die auch das F^0 und ε^0 koppeln. Nach Kap. I, § 2.2 definieren sie die Quellen

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa_T} \frac{\delta \mathcal{L}_h^{\text{int}}}{\delta h^{\mu\nu}} \quad (11)$$

und

$$T_\lambda = \frac{1}{\kappa_s} \frac{\delta \mathcal{L}_\xi^{\text{int}}}{\delta \xi} \quad (12)$$

d.h. es muß gelten:

$$\frac{1}{\kappa_T} \eta^{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{L}_h^{\text{int}}}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{1}{\kappa_s} \frac{\delta \mathcal{L}_\xi^{\text{int}}}{\delta \xi} \quad (13)$$

Eine weitere Bedingung ist dadurch gegeben, daß $\mathcal{L}_h^{\text{int}}$ wieder invariant sein muß unter der Eichtransformation

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu,\nu} + \Lambda_{\nu,\mu} \quad (14)$$

Schließlich sind $\mathcal{L}_h^{\text{int}}$ und $\mathcal{L}_\xi^{\text{int}}$ dadurch festgelegt, daß sie zu den Quellefeld-Identitäten (1) und (3) führen sollen.

[†]) Wir benutzen hier für das Spin2-Graviton der Einfachheit halber dasselbe Feldsymbol $h_{\mu\nu}$ wie oben, obwohl wir es hier mit einer Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung zu tun haben.

Ähnlich wie Raman, machen wir den Ansatz

$$\mathcal{L}_{fh}^{\text{int}} = \mathcal{L}_{fh} + \mathcal{L}_{eh} + \kappa_T \lambda_T \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} h^{\mu\nu} \quad (15)$$

und

$$\mathcal{L}_{\xi}^{\text{int}} = \mathcal{L}_{f\xi} + \mathcal{L}_{e\xi} + \kappa_s \lambda_s \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr.}} \xi \quad (16)$$

unter der Annahme, daß alle rechts auftretenden Lagrangedichten wiederum nur erste Ableitungen in den Feldern enthalten mögen. Die Parameter λ_T und λ_s legen wir später fest.

Für $\mathcal{L}_{fh}$ übernehmen wir die von Raman angegebene Struktur

$$\mathcal{L}_{fh} = \kappa_T G_{fh} F_{\mu\nu, \lambda}^{\circ} H^{\mu\nu, \lambda, q\sigma\tau} h_{q\sigma\tau} \quad (17)$$

wobei wir die Konstante G_{fh} zunächst noch offen lassen. Eine eichinvariante Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{eh}$ gewinnt man aus $\mathcal{L}_{fh}$ durch Substitution von $F_{\mu\nu}^{\circ}$ durch $\gamma_{\mu\nu}\epsilon^{\circ}$. Dies führt auf den Ansatz

$$\mathcal{L}_{eh} = \kappa_T G_{eh} \epsilon_{, \lambda}^{\circ} (h_{\mu}^{\mu, \lambda} - h_{\mu}^{\lambda, \mu}) \quad (18)$$

mit einer ebenfalls noch zu bestimmenden Konstanten G_{eh} .

Für die Lagrangefunktionen $\mathcal{L}_{f\xi}$ und $\mathcal{L}_{e\xi}$ machen wir den Ansatz

$$\mathcal{L}_{f\xi} = \kappa_s G_{f\xi} (\mathcal{F}_{\mu}^{\circ \mu, \lambda} - \mathcal{F}_{\mu}^{\lambda, \mu}) \xi_{, \lambda} \quad (19)$$

und

$$\mathcal{L}_{e\xi} = \kappa_s G_{e\xi} \epsilon_{, \lambda}^{\circ} \xi^{\lambda} \quad (20)$$

Die Struktur von $\mathcal{L}_{e\xi}$ ist der von $\mathcal{L}_{fh}$ vollkommen analog: man gewinnt sie aus $\mathcal{L}_{fh}$, wenn man dort $F_{\mu\nu}^{\circ}$ und $h_{\mu\nu}$ durch $\gamma_{\mu\nu}\epsilon^{\circ}$ bzw. $\gamma_{\mu\nu}\xi$ substituiert, während man $\mathcal{L}_{f\xi}$ aus $\mathcal{L}_{fh}$ gewinnt durch die Substitution von $h_{\mu\nu}$ durch $\gamma_{\mu\nu}\xi$.

Die noch unbestimmte Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{ef}$ ist dadurch festgelegt, daß sie an der Divergenzfreiheit des Ausdrucks $(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\circ} - \gamma_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\lambda}^{\circ \lambda})$ nichts ändern darf, wenn die Quelle-Feld-Identität (1) ihren Sinn behalten soll. Dies bedeutet aber, daß die Divergenz des von $\mathcal{L}_{ef}$ induzierten Zusatzterms in der Bewegungsgleichung des F° -Feldes identisch verschwinden muß. Dies wird offensichtlich gewährleistet durch eine Kopplung der Art $F^{\circ \mu\nu}(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \gamma_{\mu\nu}\square)\epsilon^{\circ}$,

die der Ableitungskopplung $\varepsilon_{,\lambda}^{\circ} (F_{\mu}^{\circ\mu,\lambda} - F_{\mu}^{\circ\lambda,\mu})$ äquivalent ist. Wir machen daher den Ansatz

$$\mathcal{L}_{ef} = G_{ef} \varepsilon_{,\lambda}^{\circ} (F_{\mu}^{\circ\mu,\lambda} - F_{\mu}^{\circ\lambda,\mu}) \quad (21)$$

Wir gehen jetzt dazu über, die einzelnen Feldgleichungen aufzustellen. Zunächst die des massiven Tensorfeldes $F_{\mu\nu}^{\circ}$: Bei Vernachlässigung aller Größen von zweiter Ordnung in κ_T bzw. κ_s erhalten wir:

$$G_{\mu\nu}(F^{\circ}) - M_0^2 (F_{\mu\nu}^{\circ} - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{\circ\lambda}) = g_f \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} + G_{f\ell} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} - \eta_{\mu\nu} \square) \varepsilon^{\circ} \quad (22)$$

mit dem divergenzfreien "Einstein-Tensor" $G_{\mu\nu}(F^{\circ})$. Da auch diesmal $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}}$ als divergenzfrei vorausgesetzt wurde, folgt wiederum

$$\partial^{\kappa} (F_{\mu\nu}^{\circ} - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{\circ\lambda}) = 0 \quad (23)$$

Die das Skalarmeson ε° beschreibende Feldgleichung hat (bei Vernachlässigung aller Größen von zweiter Ordnung in κ_T bzw. κ_s) die Gestalt

$$(\square + m_0^2) \varepsilon^{\circ} = g_{\varepsilon} \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr.}\lambda} + G_{f\ell} (\partial^{\kappa} \partial^{\nu} - \eta^{\kappa\nu} \square) F_{\mu\nu}^{\circ}$$

Der rechts auftretende Zusatzterm zu $\mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr.}\lambda}$ verschwindet aufgrund von (23), d.h. wir können schreiben

$$(\square + m_0^2) \varepsilon^{\circ} = g_{\varepsilon} \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr.}\lambda} \quad (24)$$

Die Feldgleichungen der beiden Gravitationsfelder $h_{\mu\nu}$ und ξ sind nach Gl. (20,21) aus Kap. I, §2.2 gegeben durch

$$G_{\mu\nu}(h) = \kappa_T T_{\mu\nu} \quad (25)$$

und

$$\square \xi = \kappa_s T_{\lambda}^{\lambda} \quad (26)$$

mit den durch (11) und (12) definierten Quellen $T_{\mu\nu}$ und T_{λ}^{λ} . Setzt man die für $\mathcal{L}_{\lambda}^{\text{int}}$ und $\mathcal{L}_{\xi}^{\text{int}}$ angegebenen Ausdrücke dort ein, so erhält man:

$$T_{\mu\nu} = \lambda_T \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr.}} - G_{fh} G_{\mu\nu}(F^{\circ}) + G_{\varepsilon h} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} - \eta_{\mu\nu} \square) \varepsilon^{\circ} \quad (27)$$

und

$$T_{\lambda}^{\lambda} = \lambda_s \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr.}\lambda} - G_{f\xi} (\partial^{\kappa} \partial^{\nu} - \eta^{\kappa\nu} \square) F_{\mu\nu}^{\circ} - G_{\varepsilon \xi} \square \varepsilon^{\circ} \quad (28)$$

Der zu $G_{f\bar{f}}$ proportionale Term verschwindet wieder aufgrund von (23). Der Einfachheit halber setzen wir $G_{f\bar{f}} \equiv 0$. Gl.(28) reduziert sich also auf

$$T^A_{\lambda} = \lambda_s \bar{f}^{hadr, A}_{\lambda} - G_{\epsilon\bar{\epsilon}} \square \epsilon^0 \quad (29)$$

Der Vergleich dieser Beziehung mit der durch Spurbildung von (27) entstehenden Relation^{†)}

$$T^A_{\lambda} = \lambda_T \bar{f}^{hadr, A}_{\lambda} - 3 G_{\epsilon\bar{\epsilon}} \square \epsilon^0 \quad (30)$$

legt es nahe,

$$\lambda_s = \lambda_T \quad \text{und} \quad G_{\epsilon\bar{\epsilon}} = 3 G_{\epsilon\bar{\epsilon}} \quad (31)$$

zu setzen.

Mit diesen Relationen wird die Bestimmung von λ_s und $G_{\epsilon\bar{\epsilon}}$ auf die von λ_T bzw. $G_{\epsilon\bar{\epsilon}}$ zurückgeführt.

Der Parameter λ_T läßt sich - genauso wie in der Theorie von Raman - wegen des Theorems von Orzalesi et al. auf Eins normieren:

$$\lambda_T = 1 \quad (32)$$

Damit wird wegen $\lambda_s = \lambda_T$ auch

$$\lambda_s = 1 \quad (33)$$

Die restlichen, noch unbestimmten Konstanten ergeben sich aus der Bedingung, daß die Quelle-Feld-Identitäten (1) und (3) erfüllt sein sollen. Bei Beachtung von (27), (28), (23) und (32) bzw. (33) bedeutet dies, daß

$$\bar{f}^{hadr}_{\mu\nu} - G_{f\bar{f}} G_{\mu\nu} (F^0) + G_{\epsilon\bar{\epsilon}} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon^0 = \lambda_f (\bar{F}^0_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} F^{0A}_{\lambda}) \quad (34)$$

und

$$\bar{f}^{hadr, A}_{\lambda} - 3 G_{\epsilon\bar{\epsilon}} \square \epsilon^0 = \lambda_{\epsilon} \epsilon^0 \quad (35)$$

gelten muß. Der Vergleich dieser Beziehungen mit den Feldgleichungen (22) und (24):

$$\bar{f}^{hadr}_{\mu\nu} - \frac{1}{g_f} G_{\mu\nu} (F^0) + \frac{1}{g_f} G_{\epsilon\bar{\epsilon}} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon^0 = \frac{M^2_0}{g_f} (\bar{F}^0_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} F^{0A}_{\lambda}) \quad (36)$$

und

$$\bar{f}^{hadr, A}_{\lambda} - \frac{1}{g_{\epsilon}} \square \epsilon^0 = \frac{m^2_n}{g_{\epsilon}} \epsilon^0 \quad (37)$$

†)

An dieser Stelle benutzen wir implizit die Bedingung (13)

zeigt, daß (34) und (35) erfüllt sind, wenn

$$G_{fh} = 1/g_f, \quad G_{\epsilon h} = G_{fh}/g_f \quad (38)$$

und

$$\lambda_f = M_o^2/g_f, \quad \lambda_\epsilon = m_o^2/g_\epsilon \quad (39)$$

Ein weiterer Vergleich von (37) mit der durch Spurbildung von (36) entstehenden Gleichung liefert schließlich:

$$G_{\epsilon f} = g_f/3g_\epsilon \quad (40)$$

so daß

$$G_{\epsilon h} = 1/3g_\epsilon \quad \text{und damit} \quad G_{\epsilon\epsilon} = 1/g_\epsilon \quad (41)$$

Die Materiefeldgleichungen unserer Theorie lauten in ihrer endgültigen Gestalt:

$$G_{\mu\nu} (F^o) + M_o^2 (F_{\mu\nu}^o - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{o,\lambda}) = g_f F_{\mu\nu}^{hadr} + \frac{1}{3} \frac{g_f}{g_\epsilon} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon^o \quad (42)$$

und

$$(\square + m_o^2) \epsilon^o = g_\epsilon F_{\lambda}^{hadr,\lambda} \quad (42a)$$

während die gesuchten Quelle-Feld-Identitäten gegeben sind durch

$$T_{\mu\nu} = \frac{M_o^2}{g_f} (F_{\mu\nu}^o - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda}^{o,\lambda}) \quad (43)$$

und

$$T_{\lambda}^{\lambda} = \frac{m_o^2}{g_\epsilon} \epsilon^o \quad (44)$$

Bei der angegebenen Wahl von G_{fh} reduziert sich die Lagrangefunktion des aus dem Skalarfeld ϵ^o und dem skalaren Gravitationsfeld ξ bestehenden Systems auf

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_\epsilon + \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\xi^{int.} \quad (45)$$

mit

$$\mathcal{L}_\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon^o_{,\lambda} \epsilon^{o,\lambda} - \frac{1}{2} m_o^2 \epsilon^{o2} + g_\epsilon F_{\lambda}^{hadr,\lambda} \epsilon^o \quad (46)$$

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2} \xi_{,\lambda} \xi^{,\lambda} \quad (47)$$

$$\mathcal{L}_\xi^{int.} = \kappa_\xi \left\{ \frac{1}{g_\epsilon} \xi_{,\lambda} \epsilon^{o,\lambda} + F_{\lambda}^{hadr,\lambda} \xi \right\} \quad (48)$$

Diese Lagrangefunktion ist nichts anderes als das Analogon der Raman-
schen Lagrangefunktion (4) für die Tensorfelder $F_{\mu\nu}^0$ und $h_{\mu\nu}$.

Zur Herleitung der Quelle-Feld-Identität (3) hatten wir uns aus inter-
pretatorischen Gründen auf die (lineare) Gravitationstheorie mit Skalar-
Tensor-Mischung bezogen. Nun zeigt sich aber, daß die Kopplung des Spin0-
Gravitons an die Materie bei der Fixierung der Materiefeldgleichungen
und der beiden Relationen (1) und (3) überhaupt keine Rolle spielt.
Denn die für die Konsistenz der beiden Identitäten (1) und (3) notwendige
Proportionalität zwischen $F_{\lambda}^{\circ\lambda}$ und ϵ^0 ergibt sich bereits aus den Be-
wegungsgleichungen (22) und (24) der massiven Felder $F_{\mu\nu}^0$ und ϵ^0 . Da näm-
lich $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr}}$ voraussetzungsgemäß weder von $F_{\mu\nu}^0$ noch von ϵ^0 abhängt, liefert
ein Koeffizientenvergleich zwischen der aus der Spurbildung von (22) her-
vorgehenden Relation

$$\square \epsilon^0 - \frac{M_0^2}{G_{fe}} F_{\lambda}^{\circ\lambda} = \frac{g_f}{3G_{fe}} \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr}\lambda}$$

und der Bewegungsgleichung (24):

$$\square \epsilon^0 + m_0^2 \epsilon^0 = g_{\epsilon} \mathcal{F}_{\lambda}^{\text{hadr}\lambda}$$

unmittelbar

$$-\frac{M_0^2}{G_{fe}} F_{\lambda}^{\circ\lambda} = m_0^2 \epsilon^0 \quad \text{und} \quad G_{fe} = \frac{1}{3} \frac{g_f}{g_{\epsilon}}$$

und mithin die aus den Quelle-Feld-Identitäten (43) und (44) folgende
Proportionalitätsbeziehung

$$F_{\lambda}^{\circ\lambda} = -\frac{1}{3} \frac{m_0^2}{M_0^2} \frac{g_{\epsilon}}{g_{\epsilon}} \epsilon^0$$

Mit $\lambda_f = M_0^2 / g_f$ folgt dann automatisch $\lambda_{\epsilon} = m_0^2 / g_{\epsilon}$. D.h. die Beziehungen
(43) und (44) leiten sich bereits aus einer Lagrangefunktion her, in der
das Spin0-Graviton überhaupt nicht auftritt, nämlich aus

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{\epsilon} + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_h^{\text{int}} + \mathcal{L}_{ef} \quad (49)$$

mit den durch (6), (7) und (9) gegebenen Lagrangefunktionen $\mathcal{L}_f$, $\mathcal{L}_{\epsilon}$ und $\mathcal{L}_h$
sowie den Wechselwirkungstermen

$$\mathcal{L}_h^{\text{int}} = \frac{\kappa_1}{g_f} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu,\lambda, \text{scr}} f_{\text{scr},\lambda} + \frac{1}{3} \frac{\kappa_2}{g_{\epsilon}} \epsilon_{,\lambda}^0 (f_{\mu}^{\lambda,\lambda} - f_{\mu}^{\lambda,\mu}) + \kappa_3 \mathcal{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr}} h^{\mu\nu} \quad (50)$$

und

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{3} \frac{g_{\epsilon}}{g_{\epsilon}} \epsilon_{,\lambda}^0 (F_{\mu}^{\circ\mu,\lambda} - F_{\mu}^{\circ\lambda,\mu}) \quad (51)$$

Die Ableitungskopplung $\mathcal{L}_{\epsilon f}$ läßt sich leicht eliminieren mit Hilfe der Feldtransformation

$$\hat{F}_{\mu\nu}^{\circ} = F_{\mu\nu}^{\circ} - \frac{1}{3 M_0^2} \frac{g_f}{g_\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^{\circ} \quad (52)$$

Unter dieser Transformation geht die Lagrangefunktion (50) über in

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o(\hat{F}_{\mu\nu}^{\circ}) + \mathcal{L}_o(\epsilon^{\circ}) + g_f \hat{F}_{\mu\nu}^{\circ} \tilde{F}^{\text{hadr}, \mu\nu} + g_\epsilon \epsilon^{\circ} \tilde{F}^{\text{hadr}, \lambda} + \mathcal{L}_o(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_h^{\text{int}} \quad (53)$$

wo $\mathcal{L}_o(\hat{F}_{\mu\nu}^{\circ})$, $\mathcal{L}_o(\epsilon)$ und $\mathcal{L}_o(h_{\mu\nu})$ die Lagrangefunktionen der freien Materiefelder $\hat{F}_{\mu\nu}^{\circ}$ (mit der Masse $\hat{M}_0 = M_0$) und ϵ° sowie des Gravitationsfeldes $h_{\mu\nu}$ darstellen und $\mathcal{L}_h^{\text{int}}$ die Gravitationswechselwirkung beschreibt:

$$\mathcal{L}_h^{\text{int}} = \frac{\kappa_2}{g_f} \hat{F}_{\mu\nu, \lambda}^{\circ} H^{\mu\nu\lambda, \text{grav}} h_{\epsilon\epsilon, \epsilon} + \frac{1}{3} \frac{\kappa_2}{g_\epsilon} \epsilon_{, \lambda}^{\circ} (h_{\mu}^{\mu, \lambda} - h_{\mu}^{\lambda, \mu}) + \kappa_2 \tilde{F}_{\mu\nu}^{\text{hadr}} h^{\mu\nu} \quad (54)$$

Die Quelle-Feld-Identitäten unserer Theorie lauten jetzt:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\hat{M}_0^2}{g_f} (\hat{F}_{\mu\nu}^{\circ} - \eta_{\mu\nu} \hat{F}_{\lambda}^{\circ \lambda}) + \frac{1}{3 g_\epsilon} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon^{\circ} \quad (55)$$

und

$$T_{\lambda}^{\lambda} = \frac{m_0^2}{g_\epsilon} \epsilon^{\circ} \quad (56)$$

wobei die zweite direkt aus der ersten folgt, wenn man die Bewegungsgleichung des ϵ° -Feldes heranzieht und berücksichtigt, daß jetzt

$$\hat{F}_{\lambda}^{\circ \lambda} = -\frac{g_f}{3 M_0^2} \tilde{F}_{\lambda}^{\text{hadr}, \lambda}$$

gilt. Bemerkenswert ist, daß die erste der beiden Quelle-Feld-Identitäten (55) und (56) nunmehr dieselbe Struktur besitzt wie die Relation (2), die wir in der Einleitung zitiert haben.

§ 2 Einbeziehung der Skalarmesonen-Dominanz in die allgemein kovariante Lagrangetheorie der Tensormesonen-Dominanz von Salam

In § 1 dieses Kapitels haben wir gesehen, wie sich die Ramansche Lagrangetheorie der TMD auf einfache Art und Weise um die Einbeziehung der SMD erweitern läßt. Es zeigte sich sogar, daß ein Rückgriff auf die Gravitationstheorie mit Skalar-Tensor-Mischung hierfür überhaupt nicht notwendig ist, sondern daß es allein auf eine geeignete Kopplung des neu eingeführten ε^0 -Mesons an die Hadronen und das Gravitationsfeld ankommt. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, daß auch die Salamsche Theorie ohne grundsätzliche Modifikationen so erweitert werden kann, daß auch die SMD in ihr zum Ausdruck kommt.

Wir halten daher an der Struktur der Salamschen Theorie fest und führen in die hadronische Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\text{hadr.}, f)$ ein massives, isoskalarcs Goldstone-Feld

$$\varphi(x) = \frac{1}{b} + \varepsilon^0(x) \quad (1)$$

mit nicht-verschwindendem Vakuumerwartungswert $1/b$ ein, das an die Spur des EIT der übrigen in $\mathcal{L}(\text{hadr.}, f)$ auftretenden Felder koppelt, nicht jedoch an die Spur seines eigenen EIT. Darüberhinaus werden wir $\varphi(x)$ so an das f -Feld koppeln, daß man bei Entwicklung von $\varphi(x)$ nach $\varepsilon^0(x)$ und

$$f_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu} - 2\kappa_f \bar{F}_{\mu\nu}^0(x) \quad (2)$$

nach $\kappa_f \bar{F}_{\mu\nu}^0$ in niederster Ordnung einen Kopplungsterm von der Art $\mathcal{L}_{\varepsilon f}$ (s. Gl.(21) aus § 1 dieses Kapitels) erhält, der nach den zuvor gemachten Erfahrungen automatisch eine Proportionalität zwischen der Spur des Tensorfeldes $\bar{F}_{\mu\nu}^0$ und dem des Spin0-Feldes ε^0 impliziert.

Unser Ausgangspunkt ist der in Kap.I, § 3 erläuterte Zusammenhang zwischen weylinvarianten Wirkungsfunktionalen und der Spur des EIT. Ähnlich wie Arnowitt et al.¹⁹ in ihrer eingangs zitierten Arbeit, ordnen wir sowohl dem f -Feld als auch den übrigen Hadronen, d.h. dem φ -Feld und allen anderen hadronischen Feldern ψ , ein von Null verschiedenes Weyl-

gewicht zu, und zwar so, daß

$$\delta f_{\mu\nu} = 2\lambda(x)f_{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \delta f^{\mu\nu} = -2\lambda(x)f^{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\delta \varphi = -\lambda(x)\varphi \quad (4)$$

$$\delta \psi = -\lambda(x)d_W^{(s)}\psi \quad (5)$$

D.h. $f_{\mu\nu}$ soll sich unter Weyltransformationen genauso verhalten wie das Gravitationsfeld, während das Goldstone-Feld φ das Verhalten eines normalen skalaren Feldes besitzen soll und der Transformationscharakter der übrigen Hadronfelder ψ durch deren jeweiliges Weylgewicht $d_W^{(s)}$ bestimmt wird ($d_W^{(0)} = 1$ für Spin0-Felder, $d_W^{(1)} = 0$ für Spin1-Felder, $d_W^{(2)} = -1$ für Spin2-Felder und $d_W^{(1/2)} = 3/2$ für Spin1/2-Felder).

Die Forderung, daß das skalare Feld ε^0 in der oben beschriebenen Weise an das durch (2) definierte Feld $F_{\mu\nu}^0$ und an die Spur des hadronischen EIT koppelt, läßt sich leicht erfüllen, wenn man φ als Eichfeld der Weyltransformationen benutzt und die gesamte hadronische Lagrangefunktion mit Hilfe dieses Feldes bis auf seinen Massenterm weylinvariant macht.

Um dies zu zeigen, zerlegen wir $\mathcal{L}(\text{hadr.}, f)$ in folgender Weise:

$$\mathcal{L}(\text{hadr.}, f) = \mathcal{L}(\varphi, f) + \mathcal{L}^\varphi(\psi, f) \quad (6)$$

wo $\mathcal{L}(\varphi, f)$ die bis auf den Massenterm weylinvariante Lagrangefunktion des φ -Feldes ist und $\mathcal{L}^\varphi(\psi, f)$ die mit Hilfe des φ -Feldes weylinvariant gemachte Lagrangefunktion der übrigen Hadronen. $\mathcal{L}(\varphi, f)$ ist explizit gegeben durch

$$\mathcal{L}(\varphi, f) = \mathcal{L}_{\text{inv}}(\varphi, f) + \mathcal{L}_m(\varphi, f) \quad (7)$$

mit dem weylinvarianten Anteil (vgl. Gl.(5) aus Kap.I, § 3.2)

$$\mathcal{L}_{\text{inv}}(\varphi, f) = \sqrt{-f} \left\{ -\frac{1}{12} R(f)\varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,\nu} f^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \right\} \quad (8)$$

und dem Massenterm

$$\mathcal{L}_m(\varphi, f) = -\frac{1}{2} \sqrt{-f} m_0^2 \left(\varphi - \frac{1}{f} \right)^2 \quad (9)$$

Wir haben hierbei in $\mathcal{L}_m(\varphi, f)$ den Vakuumerwartungswert des φ -Feldes von p subtrahiert, damit $\mathcal{L}_m(\varphi, f)$ im Unendlichen verschwindet.

Die Variation von $\mathcal{L}(\text{hadr.}, f)$ unter den Weyltransformationen (2) bis (4) ist nun gegeben durch

$$\delta \mathcal{L}(\text{hadr.}, f) = \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} \delta f^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} \delta f^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{hadr.}}(f)}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta \psi} \delta \psi \quad (10)$$

Mit $\delta \mathcal{L}(\text{hadr.}, f)/\delta \varphi = 0 = \delta \mathcal{L}^\Psi(\psi, f)/\delta \psi$ und den Beziehungen

$$\frac{\delta \mathcal{L}(\varphi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-f} T_{\mu\nu}(\varphi) \quad (11)$$

und

$$\frac{\delta \mathcal{L}^\Psi(\psi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-f} T_{\mu\nu}^\Psi(\psi) \quad (12)$$

läßt sich hierfür auch schreiben

$$\delta \mathcal{L}(\text{hadr.}, f) = \frac{1}{2} \sqrt{-f} \{T_{\mu\nu}(\varphi) + T_{\mu\nu}^\Psi(\psi)\} 2\lambda f^{\mu\nu} \quad (13)$$

d.h.

$$\frac{\delta \mathcal{L}(\text{hadr.}, f)}{\delta \lambda} = \sqrt{-f} \{T_\lambda^\lambda(\varphi) + T_\lambda^\lambda(\psi)\} \quad (13')$$

In unserem Fall wird die Weylinvarianz von $\mathcal{L}(\text{hadr.}, f)$ allein durch den Massenterm (9) gebrochen, so daß sich $\delta \mathcal{L}(\text{hadr.}, f)/\delta \lambda$ einfach berechnen läßt. Mit

$$\delta \mathcal{L}_m(\varphi, f) = \frac{\delta \mathcal{L}_m(\varphi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} \delta f^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}_m(\varphi, f)}{\delta \varphi} \delta \varphi \quad (14)$$

erhält man:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m(\varphi, f)}{\delta \lambda} = -m_0^2 \sqrt{-f} \left\{ 2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \right)^2 - \left(\varphi - \frac{1}{6} \right) \varphi \right\} \quad (15)$$

Andererseits ist die in (13) auftretende Größe $T_{\mu\nu}(\varphi)$ gegeben durch

$$T_{\mu\nu}(\varphi) = \left\{ \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - f_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} - \frac{1}{2} m_0^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \right)^2 \right] \right\} - \frac{1}{6} \{ (D_{\mu\nu} - f_{\mu\nu} \square) \varphi^2 + G_{\mu\nu}(f) \varphi^2 \}$$

und die Spurbildung hiervon liefert

$$T_\lambda^\lambda(\varphi) = \varphi \square \varphi + 2m_0^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} R(f) \varphi^2 \quad (16)$$

Setzt man die Ausdrücke (16) und (15) in (13') ein, so erhält man die Gleichung

$$\square \varphi + m_0^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{\varphi} \sqrt{-f} T_\lambda^\lambda(\psi) - \frac{1}{6} R(f) \varphi \quad (17)$$

Diese aber ist identisch mit der Bewegungsgleichung des φ -Feldes. Denn aus der Variation der Lagrangefunktion (6) nach φ folgt bei Berücksichtigung von (8) und (9) zunächst:

$$\square \varphi + m_0^2 \left(\varphi - \frac{1}{6} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}^\Psi(\psi, f)}{\delta \varphi} - \frac{1}{6} R(\varphi) \varphi \quad (18)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung stimmt überein mit $-\frac{1}{\varphi} \sqrt{-f} T^\varphi_\lambda(\psi)$. Denn aus dem Verschwinden der Variation von $\mathcal{L}^\varphi(\psi, f)$ unter Weyl-Transformationen:

$$\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f) = \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta f^{\mu\nu}} \delta f^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta \psi} \delta \psi = 0$$

folgt (wegen $\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)/\delta \varphi = 0$):

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-f} T^\varphi_{\mu\nu}(\psi) 2 \lambda f^{\mu\nu} - \frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta \varphi} \lambda \varphi = 0$$

und somit

$$\frac{\delta \mathcal{L}^\varphi(\psi, f)}{\delta \varphi} = -\sqrt{-f} T^\varphi_\lambda(\psi) \quad (19)$$

(Vgl. hierzu Gl.(15) und (16) aus Kap. I , § 3,2)

D.h. Gl. (17) ist identisch mit der Bewegungsgleichung (18). Sie reduziert sich bei Entwicklung nach $\kappa_f F^\circ_{\mu\nu}$ und ε° in niederster Ordnung auf eine inhomogene Klein-Gordon-Gleichung für ε° mit $T^\lambda_\lambda(\psi)$ als Quelle (die in niederster Ordnung nicht von ε° abhängt).

Um zu sehen, daß die hier unter dem Aspekt der Weyl-Invarianz erweiterte Salamsche Theorie bei Linearisierung in die lorentzinvariante Theorie aus § 1 dieses Kapitels übergeht, entwickeln wir die volle Lagrangefunktion (7) aus Kap.II, § 3:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{fg} + \mathcal{L}_g$$

sowohl nach $\kappa_f F^\circ_{\mu\nu}$ und $\kappa_g h_{\mu\nu}$ wie nach ε° . In niederster Ordnung von κ_f , κ_g und b führt dies auf

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lin.}} &= \mathcal{L}_{\text{kin.}}(F^\circ_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_0(\varepsilon^\circ) + \mathcal{L}_0(\psi) + \kappa_f F^\circ_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\psi) - b \varepsilon^\circ T^\lambda_\lambda(\psi) \\ &- \frac{1}{6} \frac{\kappa_f^2}{b^2} \mathcal{L}_{\text{kin.}}(F^\circ_{\mu\nu}) - \frac{1}{3} \frac{\kappa_f}{b} (F^\circ_{\mu}{}^{\mu\lambda} - F^\circ_{\mu}{}^{\lambda\mu}) \varepsilon^\circ{}_{,\lambda} \\ &- \frac{1}{2} \frac{M_g^2}{\kappa_g^2} \{ (\kappa_f F^{\circ\alpha\beta} - \kappa_g h^{\alpha\beta}) (\kappa_f F^{\circ\delta} - \kappa_g h^{\delta\gamma}) (\eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta}) \} \\ &+ \mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_0(\text{lept.}) + \kappa_g h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\text{lept.}) \quad (20) \end{aligned}$$

Die Kopplung $-b \varepsilon^\circ T^\lambda_\lambda(\psi)$ ergibt sich aus der Entwicklung der weylinvarianten Lagrangefunktion $\mathcal{L}^\varphi(\psi, f)$ nach ε° (siehe auch Gl.(19)!), während die Terme in der zweiten Zeile von (20) aus der Entwicklung von $-\frac{1}{12} R(f) \varphi^2$ nach $\kappa_f F^\circ_{\mu\nu}$ und ε° hervorgehen. Um letztere zu beseitigen, nehmen wir zu-

nächst eine Umnormierung des F-Feldes vor und definieren

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} = c F_{\mu\nu}^{\circ}, \quad \tilde{M}_0 = c^{-1} M_0, \quad \tilde{\kappa}_f = c^{-1} \kappa_f \quad (21 \text{ a,b,c})$$

mit

$$c = \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\kappa_f^2}{\delta^2}\right)^{1/2} \quad (22)$$

Bei Vernachlässigung des uns nicht interessierenden leptonischen Anteils und der irrelevanten freien hadronischen Lagrangefunktion $\mathcal{L}_0(\psi)$ geht dann $\mathcal{L}^{\text{lin}}$ über in

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lin}} = & \mathcal{L}_{\text{kin}}(\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ}) + \mathcal{L}_0(\varepsilon^{\circ}) + \tilde{\kappa}_f \tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} T^{\mu\nu}(\psi) - \delta \varepsilon^{\circ} T^{\lambda}_{\lambda}(\psi) \\ & - \frac{1}{3} \frac{\tilde{\kappa}_f}{\delta} (\tilde{F}_{\mu}^{\circ \mu\lambda} - \tilde{F}^{\circ \lambda, \mu}_{\mu}) \varepsilon^{\circ}_{,\lambda} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\tilde{M}_0^2}{\tilde{\kappa}_f} \{ (\tilde{\kappa}_f \tilde{F}^{\circ \alpha\beta} - \kappa_g h^{\alpha\beta}) (\tilde{\kappa}_f \tilde{F}^{\circ \gamma\delta} - \kappa_g h^{\gamma\delta}) (\gamma_{\alpha\gamma} \gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta}) \} \\ & + \mathcal{L}_0(h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (20')$$

Um die Ableitungskopplung zwischen dem F- und ε -Feld zu eliminieren und auch den Massenterm zu diagonalisieren, nehmen wir die Feldtransformationen

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} = \tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} + \frac{1}{\tilde{M}_0^2} \frac{1}{3} \frac{\tilde{\kappa}_f}{\delta} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \varepsilon^{\circ} - \frac{\kappa_g}{\tilde{\kappa}_f} h_{\mu\nu} \quad (23)$$

und

$$h_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{\kappa_g^2}{\tilde{\kappa}_f^2}\right)^{1/2} \tilde{h}_{\mu\nu} \quad (24)$$

vor. Bei Benutzung der Gravitationskonstanten

$$\bar{\kappa}_g = \left(1 + \frac{\kappa_g^2}{\tilde{\kappa}_f^2}\right) \kappa_g \quad (25)$$

schreibt sich $\mathcal{L}^{\text{lin}}$ schließlich in der Form

$$\mathcal{L}^{\text{lin}} = \mathcal{L}_0(\tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ}) + \mathcal{L}_0(\varepsilon^{\circ}) + \bar{\kappa}_f \tilde{F}_{\mu\nu}^{\circ} T^{\mu\nu}(\psi) - \delta \varepsilon^{\circ} T^{\lambda}_{\lambda}(\psi) + \mathcal{L}_0(\tilde{h}_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\tilde{h}}^{\text{int}} \quad (20'')$$

mit

$$\bar{M}_0 = \tilde{M}_0, \quad \bar{\kappa}_f = \tilde{\kappa}_f \quad (20'' \text{ a,b})$$

und

$$\mathcal{L}_{\bar{h}}^{\text{int}} = \frac{\bar{\kappa}_g}{\bar{\kappa}_f} \bar{F}_{\mu\nu,\lambda}^0 \dot{H}^{\mu\nu\lambda,96\tau} \bar{h}_{96,\tau} - \frac{1}{3} \frac{\bar{\kappa}_\varepsilon}{\bar{\kappa}_\delta} (\bar{h}_\mu^{\mu,\lambda} - \bar{h}_\mu^{\lambda,\mu}) \varepsilon_{,\lambda}^0 + \bar{\kappa}_g \bar{h}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(\psi) \quad (20'')$$

Die Lagrangefunktion (20'') besitzt genau dieselbe Struktur wie die Lagrangefunktion (53) aus § 1 dieses Kapitels. D.h. die dort entwickelte Theorie ist nichts anderes als die lineare Näherung der in diesem Abschnitt erweiterten Salamschen Theorie. An die Stelle der Felder $\hat{F}_{\mu\nu}^0$ und $h_{\mu\nu}$ sind jetzt die Felder $\bar{F}_{\mu\nu}^0$ und $\bar{h}_{\mu\nu}$ getreten, und die Stelle des Quellstroms $J_{\mu\nu}^{\text{had.}}$ wird jetzt vom hadronischen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}(\psi)$ eingenommen. Den Kopplungskonstanten κ_g , g_f und g_ε schließlich entsprechen die Konstanten $\bar{\kappa}_g$, $\bar{\kappa}_f$ und $\bar{\kappa}_\varepsilon$.

§ 3 Explizite Gestalt der hadronischen Lagrangefunktion

Wir kommen nunmehr zur expliziten Konstruktion der weylinvarianten Lagrangefunktion $\mathcal{L}^\Psi(\psi, f)$. Sie wurde in §2 dieses Kapitels als Bestandteil der hadronischen Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\text{had.r., } f) = \mathcal{L}(\varphi, f) + \mathcal{L}^\Psi(\psi, f)$$

eingeführt und enthält die Wechselwirkung der durch

$$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\kappa_4 F_{\mu\nu}^0$$

und

$$\varphi = \frac{1}{\delta} + \varepsilon^0$$

definierten Felder $F_{\mu\nu}^0$ und ε^0 mit den Hadronfeldern ψ . Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, diese Wechselwirkung durch die allgemein kovariante und weylinvariante Lagrangefunktion $\mathcal{L}^\Psi(\psi, f)$ in realistischer Weise zu beschreiben, stellt den Prüfstein des hier entwickelten Lagrangemodells der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz dar.

3.1 Die Nonetts der 2^+ - und 0^+ -Mesonen

Bevor wir dazu übergehen, unser Modell auf physikalische Prozesse anzuwenden, müssen wir es noch vervollständigen. Denn bisher haben wir die Tatsache ignoriert, daß es zwei verschiedene, sich durch ihre Masse unterscheidende isoskalare 2^+ -Mesonen gibt, das $f(1250)$ - und $f'(1514)$ -Meson, und daß es wahrscheinlich auch zwei verschiedene isoskalare 0^+ -Mesonen gibt, das ε - und ε' -Meson. Während das f - und f' -Meson zusammen mit dem $A_2(1310)$ - und $K_N(1420)$ -Meson das $SU(3)$ -Nonett der 2^+ -Mesonen bilden und deren Massen und Zerfallsbreiten seit langem wohl-bekannt sind⁸¹⁻⁸⁴, ist ein Nonett von 0^+ -Mesonen noch keineswegs etabliert. Die zum A_2 und K_N analogen Oktett-Partner des ε und ε' bezeichnet man i.a. mit δ und κ . Leider sind die Massen und Zerfallsbreiten der 0^+ -Mesonen nur zum Teil bekannt. Auf die damit verbundenen Schwierigkeiten, quantitative Aussagen über die Kopplung dieser Teilchen an andere Hadronen zu machen, gehen wir später noch ausführlich ein.

Vom f - und f' -Meson weiß man, daß sie durch eine Mischung reiner $SU(3)$ -Zustände zu beschreiben sind, d.h. durch eine Überlagerung der isoskalaren

Oktett- und der Singlett-Komponente des 2^+ -Mesonen-Nonetts. Für das ε - und ε' -Meson gilt eine analoge Feststellung, jedoch weiß man hier nichts über den Grad der Mischung, da die Parameter der 0^+ -Resonanzen zu ungenau bestimmt sind.

Die bisher vorgenommene Identifikation des $SU(3)$ -Singlett-Feldes $F_{\mu\nu}^0$ mit dem Feld des f -Mesons ist nach dem soeben Gesagten nicht möglich. Eine entsprechende Identifikation des ε^0 mit dem Feld des ε -Mesons ist zumindest fragwürdig, da nach dem Experiment eine ε - ε' -Mischung nicht auszuschließen ist.

Um der genannten $SU(3)$ -Struktur Rechnung zu tragen, verfahren wir so, wie Weiss es in seiner eingangs zitierten Arbeit²¹ getan hat. D.h. wir behandeln die isoskalare Oktett-Komponente des 2^+ -Mesonen-Nonetts als Teil der Lagrangefunktion $\mathcal{L}^\Psi(\psi, f)$ und beschreiben sie durch ein Pauli-Fierz-Feld, während die f - f' -Mischung durch Hinzufügen eines geeigneten Mischungsterms berücksichtigt wird. Analog soll auch der ε - ε' -Komplex behandelt werden.

Um ein möglichst vollständiges Bild über die hadronischen Kopplungen sämtlicher 2^+ - bzw. 0^+ -Mesonen zu liefern, werden wir im folgenden jedoch das gesamte Nonett dieser Teilchen betrachten.

3.1 a Das f - f' - und ε - ε' -Mischungsproblem

Die Lagrangefunktionen der 2^+ - und 0^+ -Nonetts enthalten neben den Singlett-Anteilen, die durch das $F_{\mu\nu}^0$ und ε^0 beschrieben werden, jeweils einen Oktettanteil und einen Term, der die Mischung zwischen den Singletts und den isoskalaren Oktett-Komponenten berücksichtigt. Letztere müssen als Bestandteile von $\mathcal{L}^\Psi(\psi, f)$ sowohl allgemein kovariant wie weylinvariant sein.

Die Konstruktion der Oktett-Anteile, die diesen Forderungen genügt, bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Die allgemeine Kovarianz wird erreicht durch die Substitution von $\eta_{\mu\nu}$ durch $f_{\mu\nu}$, wobei die normalen Ableitungen durch allgemein kovariante Ableitungen zu ersetzen sind. Im Falle von Skalar- und Vektorfeldern (die uns später interessieren werden) reduzieren sich

letztere bekanntlich auf normale Ableitungen, was bei Tensorfeldern nicht mehr der Fall ist. Die ebenfalls geforderte Weylinvarianz bedeutet auch keine Schwierigkeit, wenn man sich daran erinnert, daß die jeweilig auftretenden Felder nur mit einer bestimmten Potenz von φ zu multiplizieren sind, um zu Feldern mit dem Weylgewicht Null zu gelangen. Von prinzipieller Schwierigkeit dagegen ist die Konstruktion eines geeigneten Mischungsterms für das 2^+ - bzw. 0^+ -Nonett. Im allgemeinen wird die Singlett-Oktett-Mischung durch das sog. "mass-mixing" beschrieben, das für die entsprechende Lagrangefunktion das Auftreten eines zusätzlichen Massenmischungsterms bedeutet, der bilinear in den mischenden Feldern ist. Demgegenüber steht das von Schnitzer et al.^{3,86} vorgeschlagene "current-mixing", das die Singlett-Oktett-Mischung durch einen in den Ableitungen der mischenden Felder bilinearen, kinetischen Mischungsterm berücksichtigt.

Im Fall der 2^+ -Mesonen zeigt sich nun, daß man keinen allgemein kovarianten Ausdruck konstruieren kann, der sich beim Übergang zur "linearen Näherung" auf einen Massenmischungsterm reduziert. Im Fall der 0^+ -Mesonen dagegen ist es die geforderte Weylinvarianz, die dies unmöglich macht. Dagegen lassen sich leicht Ausdrücke konstruieren, die bei der Entwicklung nach $\kappa, F_{\mu\nu}$ bzw. ε^0 kinetische Mischungsterme liefern. Dementsprechend greifen wir hier zum "current-mixing" und nicht, wie üblich, zum "mass mixing".

Die Oktett-Anteile der Lagrangefunktionen der 2^+ - und 0^+ -Mesonen-Nonetts schreiben sich bei Verwendung der SU(3)-Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} A_2^0 + \frac{1}{16} F^8 & A_2^+ & K_N^+ \\ A_2^- & -\frac{1}{12} A_2^0 + \frac{1}{16} F^8 & K_N^0 \\ K_N^- & \bar{K}_N^0 & -\frac{2}{16} F^8 \end{pmatrix}$$

und

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \sigma^0 + \frac{1}{16} \varepsilon^8 & \sigma^+ & \kappa^+ \\ \sigma^- & -\frac{1}{12} \sigma^0 + \frac{1}{16} \varepsilon^8 & \kappa^0 \\ \kappa^- & \bar{\kappa}^0 & -\frac{2}{16} \varepsilon^8 \end{pmatrix}$$

in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^q(T, f) = \frac{1}{2} \sqrt{-f} \operatorname{Sp}[(1 + \epsilon_T \lambda_S) \hat{T}_{\mu\nu, \lambda} \hat{H}^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} \hat{T}_{q\sigma, \tau} \\ - M_T^2 (\hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\lambda} \hat{f}^{\nu\sigma} \hat{T}_{q\sigma} - \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\sigma} \hat{f}^{\nu\lambda} \hat{T}_{q\lambda})] \end{aligned} \quad (1)$$

und

$$\mathcal{L}^q(S, f) = \frac{1}{2} \sqrt{-f} \operatorname{Sp}[(1 + \epsilon_S \lambda_S) \hat{S}_{, \mu} \hat{f}^{\mu\nu} \hat{S}_{, \nu} - M_S^2 \hat{S}^2] \quad (2)$$

wobei M_T und M_S die jeweiligen Oktettmassen bedeuten und ϵ_T und ϵ_S die Massenbrechungsparameter.

Aus Gründen der Weylinvarianz (vgl. Kapitel I, § 3.2) haben wir hier die Felder

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tilde{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \hat{S} = S \tilde{\varphi}^{-1} \quad (3a, b)$$

und

$$\hat{f}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \tilde{\varphi}^2 \quad (4)$$

mit

$$\tilde{\varphi} = \theta \varphi = 1 + \theta \epsilon^0 \quad (5)$$

benutzt. Die Größe $\hat{H}^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau}$ geht dementsprechend aus der in Kap. I, §1.3 definierten Größe

$H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\tau\epsilon} - 2 \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\sigma} \eta^{\lambda\epsilon} + \eta^{\nu\lambda} \eta^{\mu\tau} \eta^{\sigma\epsilon} + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\mu\tau} \eta^{\lambda\epsilon} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\epsilon} \eta^{\lambda\tau}$ durch die Substitution

$$\eta^{\mu\nu} \longrightarrow \hat{f}^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} \tilde{\varphi}^{-2}$$

hervor. Ferner ist darauf zu achten, daß die kovarianten Ableitungen in $\mathcal{L}^q(T, f)$ bzgl. der Metrik $\hat{f}_{\mu\nu}$ zu bilden sind, d.h. mit den Christoffelsymbolen

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \hat{f}^{\alpha\epsilon} (\hat{f}_{\mu\epsilon, \nu} + \hat{f}_{\nu\epsilon, \mu} - \hat{f}_{\mu\nu, \epsilon}) \\ &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \tilde{\varphi} (\delta^{\alpha}_{\mu} \tilde{\varphi}_{, \nu} + \delta^{\alpha}_{\nu} \tilde{\varphi}_{, \mu} - f_{\mu\nu} \tilde{\varphi}^{, \alpha}) \end{aligned} \quad (6)$$

Die allgemein kovarianten und weylinvarianten Mischungsterme lauten:

$$\mathcal{L}^q_{mix}(T, f) = \frac{\chi_T}{2 \chi_f} \sqrt{-f} \{ \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\lambda} \hat{f}^{\nu\sigma} [R_{q\sigma}(f) - \frac{1}{2} \hat{f}_{q\sigma} R(\hat{f})] \} \quad (7)$$

und

$$\mathcal{L}^q_{mix}(S, f) = \frac{\chi_S}{2 \theta} \sqrt{-f} \{ -\frac{1}{6} R(f) \varphi \epsilon^2 + \varphi_{, \mu} f^{\mu\nu} \epsilon^{\epsilon}_{, \nu} \} \quad (8)$$

Auch hierzu wieder einige Bemerkungen: Die Weylinvarianz von $\mathcal{L}_{\text{mix}}^f(F^8, f)$ ist trivialerweise erfüllt, weil wir wieder mit Feldern vom Weylgewicht Null gearbeitet haben. Diejenige von $\mathcal{L}_{\text{mix}}^{\varphi}(\varepsilon^8, f)$ folgt daraus, daß f und ε^8 Spin0-Felder sind und daß $\mathcal{L}_{\text{mix}}^{\varphi}(\varepsilon^8, f)$ bezüglich Weyl-Transformationen die Struktur der weylinvarianten Lagrangedichte eines Spin0-Feldes besitzt (vgl. Kap. I, § 3.2, Gl.(5)).

Wir addieren nun zu sämtlichen Anteilen, die zur Lagrangedichte $\mathcal{L}_f$ beitragen, den Massenterm $\mathcal{L}_{\text{fg}}$ und setzen in letzterem $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, da uns die Gravitationswechselwirkungen im Moment nicht interessieren. Bei Beschränkung auf die im Zusammenhang mit dem Mischungsproblem allein entscheidenden isoskalaren Anteile liefert die Entwicklung nach $\kappa_f F_{\mu\nu}^0$ bzw. $b\varepsilon^0$ dann folgende bilinearen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lin}} = & \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} F_{q\sigma,\tau}^0 - \frac{1}{2} M_0^2 (F_{\mu\nu}^0 F^{0\mu\nu} - F_{\mu}^{0\mu} F_{\nu}^{0\nu}) \\ & + \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^8 H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} F_{q\sigma,\tau}^8 - \frac{1}{2} M_8^2 (F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu} - F_{\mu}^{8\mu} F_{\nu}^{8\nu}) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_{,\lambda}^0 \varepsilon^{0,\lambda} - \frac{1}{2} m_0^2 \varepsilon^{02} \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_{,\lambda}^8 \varepsilon^{8,\lambda} - \frac{1}{2} m_8^2 \varepsilon^{82} \quad (9) \\ & + \frac{\kappa_f}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} F_{q\sigma,\tau}^8 + \frac{\kappa_f}{2} \varepsilon_{,\lambda}^0 \varepsilon^{8,\lambda} \\ & - \frac{1}{6} \frac{\kappa_f^2}{\delta} \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^0 H^{\mu\nu\lambda, q\sigma\tau} F_{q\sigma,\tau}^0 - \frac{1}{3} \frac{\kappa_f}{\delta} (F_{\mu}^{0\mu,\lambda} - F_{\mu}^{0\lambda,\mu}) \varepsilon_{,\lambda}^0 \\ & - \kappa_f \frac{\delta}{\kappa_f} (F_{\mu}^{8\mu,\lambda} - F_{\mu}^{8\lambda,\mu}) \varepsilon_{,\lambda}^0 - \frac{\kappa_f}{6} \frac{\kappa_f}{\delta} (F_{\mu}^{0\mu,\lambda} - F_{\mu}^{0\lambda,\mu}) \varepsilon_{,\lambda}^8 \end{aligned}$$

Neben den freien Lagrangefunktionen der beiden isoskalaren Tensor- und Skalarfelder und den zugehörigen Mischungstermen treten hier - in der 6. und 7. Zeile - vier weitere bilineare Ableitungskopplungen auf. Die ersten beiden sind uns bereits in § 2 dieses Kapitels begegnet und rühren von der Entwicklung von $-\frac{1}{12} R(f) \varphi^2$ nach $\kappa_f F_{\mu\nu}^0$ bzw. $b\varepsilon^0$ her. Die letzten beiden dagegen stammen aus der Entwicklung von $\mathcal{L}_{\text{mix}}^{\varphi}(F^8, f)$ und $\mathcal{L}_{\text{mix}}^{\varphi}(\varepsilon^8, f)$ nach $b\varepsilon^0$.

Die Feldtransformationen, die sämtliche Ableitungskopplungen eliminieren und die Lagrangefunktion (9) auf die einfache Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{lin}} = & \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} F_{\varrho\sigma,\tau} - \frac{1}{2} M_f^2 (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_\mu^\mu F_\nu^\nu) \\ & + \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}^{\prime} H^{\mu\nu\lambda, \varrho\sigma\tau} F_{\varrho\sigma,\tau}^{\prime} - \frac{1}{2} M_{f'}^2 (F_{\mu\nu}^{\prime} F^{\prime\mu\nu} - F_\mu^{\prime\mu} F_\nu^{\prime\nu}) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_{,\lambda} \varepsilon^{,\lambda} - \frac{1}{2} m_\varepsilon^2 \varepsilon^2 \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon'_{,\lambda} \varepsilon'^{\lambda} - \frac{1}{2} m_{\varepsilon'}^2 \varepsilon'^2 \end{aligned} \quad (10)$$

bringen, lauten:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = & \frac{\tilde{M}_0}{M_f} \cos \theta_T \tilde{F}_{\mu\nu}^0 - \frac{M_g}{M_f} \sin \theta_T F_{\mu\nu}^g \\ & - \frac{1}{M_f} \frac{\tilde{\kappa}_f}{6} \left\{ \sin \theta_T \frac{1}{M_g} \frac{g^2}{\tilde{\kappa}_f^2} \tilde{x}_T - \cos \theta_T \frac{1}{M_0} \frac{1}{3} \right\} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^0 + \frac{\cos \theta_T}{M_f} \frac{1}{M_0} \frac{\tilde{\kappa}_f}{6} \frac{x_s}{6} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\prime} = & \frac{\tilde{M}_0}{M_{f'}} \sin \theta_T \tilde{F}_{\mu\nu}^0 + \frac{M_g}{M_{f'}} \cos \theta_T F_{\mu\nu}^g \\ & + \frac{1}{M_{f'}} \frac{\tilde{\kappa}_f}{6} \left\{ \cos \theta_T \frac{1}{M_g} \frac{g^2}{\tilde{\kappa}_f^2} \tilde{x}_T + \sin \theta_T \frac{1}{M_0} \frac{1}{3} \right\} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^0 + \frac{\sin \theta_T}{M_{f'}} \frac{1}{M_0} \frac{\tilde{\kappa}_f}{6} \frac{x_s}{6} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^0 \end{aligned} \quad (12)$$

und

$$\varepsilon = \frac{m_0}{m_\varepsilon} \cos \theta_s \varepsilon^0 - \frac{m_g}{m_\varepsilon} \sin \theta_s \varepsilon^g \quad (13)$$

$$\varepsilon' = \frac{m_0}{m_{\varepsilon'}} \sin \theta_s \varepsilon^0 + \frac{m_g}{m_{\varepsilon'}} \cos \theta_s \varepsilon^g \quad (14)$$

Die in (10) bis (14) auftretenden Größen haben im einzelnen folgende Bedeutung:

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^0 = c F_{\mu\nu}, \quad \tilde{M}_0 = c^{-1} M_0, \quad \tilde{\kappa}_f = c^{-1} \kappa_f, \quad \tilde{x}_T = c^{-1} x_T \quad (15a, b, c, d)$$

mit

$$c = \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\kappa_f^2}{\tilde{\kappa}_f^2} \right)^{1/2} \quad (16)$$

(vgl. hierzu Gl. (21) und (22) aus § 2 dieses Kapitels!), sowie

$$x_T = 2 M_0 M_g \sin \theta_T \cos \theta_T (M_{f'}^{-2} - M_f^{-2}) \quad (17)$$

$$x_s = 2 m_0 m_g \sin \theta_s \cos \theta_s (m_{\varepsilon'}^{-2} - m_\varepsilon^{-2}) \quad (18)$$

und

$$\frac{1}{M_f^2} = \frac{1}{\cos 2\theta_T} \left\{ \frac{\cos^2 \theta_T}{M_0^2} - \frac{\sin^2 \theta_T}{M_g^2} \right\} ; \quad \frac{1}{M_{f'}^2} = \frac{1}{\cos 2\theta_T} \left\{ \frac{\cos^2 \theta_T}{M_g^2} - \frac{\sin^2 \theta_T}{M_0^2} \right\} \quad (19a,b)$$

$$\frac{1}{m_\ell^2} = \frac{1}{\cos 2\theta_S} \left\{ \frac{\cos^2 \theta_S}{m_0^2} - \frac{\sin^2 \theta_S}{m_g^2} \right\} ; \quad \frac{1}{m_{\ell'}^2} = \frac{1}{\cos 2\theta_S} \left\{ \frac{\cos^2 \theta_S}{m_g^2} - \frac{\sin^2 \theta_S}{m_0^2} \right\} \quad (20a,b)$$

Für die Mischungswinkel θ_T und θ_S ergibt sich aus (19a,b) bzw. (20a,b):

$$\sin^2 \theta_T = \frac{M_{\ell'}^2 - M_g^2}{M_{f'}^2 - M_f^2} \frac{M_f^2}{M_g^2} \quad (21)$$

und

$$\sin^2 \theta_S = \frac{m_{\ell'}^2 - m_g^2}{m_{\ell}^2 - m_\ell^2} \frac{m_\ell^2}{m_g^2} \quad (22)$$

Diese Formeln unterscheiden sich von denen, die man im "mass mixing"-Modell für die Mischungswinkel erhält, durch den zusätzlichen Faktor M_T^2/M_S^2 bzw. m_ℓ^2/m_g^2 . Um θ_T bzw. θ_S bestimmen zu können, benötigen wir u.a. die "unphysikalischen" Massen M_0 und m_0 . Diese genügen näherungsweise einer Art Gell-Mann-Okubo-Massenformel, in der die Massenquadrate durch ihr Inverses ersetzt sind ^{3,86}, d.h.

$$\frac{1}{M_g^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{M_{K_N}^2} - \frac{1}{M_{\Lambda_2}^2} \right) \quad (23)$$

und

$$\frac{1}{m_g^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{m_\kappa^2} - \frac{1}{m_\sigma^2} \right). \quad (24)$$

Mit den experimentell bekannten Massen der 2^+ -Mesonen erhält man dann $\theta_T = 24,2^\circ$. Dieser Wert ist um ca. 6° kleiner als derjenige, den das "mass mixing"-Modell liefert.

Über den Winkel θ_S können wir leider keine präzisen Angaben machen, da weder die Masse des κ -Mesons, noch die Massen der beiden isoskalaren 0^+ -Mesonen hinreichend genau bestimmt sind. Wir kommen hierauf im nächsten Abschnitt, in dem wir die experimentelle Situation der 0^+ -Mesonen besprechen, noch einmal zurück.

Zuvor schreiben wir noch die Quelle-Feld-Identitäten (55) und (56) aus § 1 dieses Kapitels auf die physikalischen Felder um. Hierzu benötigen

wir die Umkehrung der Transformationsgleichungen (11) bis (14).

Sie lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu}^0 &= \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T F_{\mu\nu} + \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T F_{\mu\nu}' \\ &- \frac{1}{3} \frac{\tilde{\kappa}_f}{\tilde{\kappa}_f} \frac{1}{M_0^2} \left\{ \frac{m_0}{m_\epsilon} \cos \theta_S \partial_\mu \partial_\nu \epsilon + \frac{m_0}{m_{\epsilon'}} \sin \theta_S \partial_\mu \partial_\nu \epsilon' \right\}\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^0 &= -\frac{M_f}{M_\theta} \sin \theta_T F_{\mu\nu} + \frac{M_{f'}}{M_\theta} \cos \theta_T F_{\mu\nu}' \\ &- \frac{1}{3} \frac{\tilde{\kappa}_f}{\tilde{\kappa}_f} \frac{x_T}{M_\theta^2} \left\{ \frac{m_\theta}{m_0} \cos \theta_S \partial_\mu \partial_\nu \epsilon + \frac{m_{\theta'}}{m_0} \sin \theta_S \partial_\mu \partial_\nu \epsilon' \right\}\end{aligned}\quad (26)$$

und

$$\epsilon^0 = \frac{m_\epsilon}{m_0} \cos \theta_S \epsilon + \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} \sin \theta_S \epsilon' \quad (27)$$

$$\epsilon^\theta = -\frac{m_\epsilon}{m_\theta} \sin \theta_S \epsilon + \frac{m_{\epsilon'}}{m_\theta} \cos \theta_S \epsilon' \quad (28)$$

Mit (25) und (27) geht dann die erste der beiden Quelle-Feld-Identitäten (55) und (56) aus § 1 dieses Kapitels über in

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= \frac{\tilde{M}_0 M_f}{\tilde{\kappa}_f} \cos \theta_T (F_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} F_\lambda^\lambda) + \frac{\tilde{M}_0 M_{f'}}{\tilde{\kappa}_f} \sin \theta_T (F_{\mu\nu}' - \eta_{\mu\nu} F_{\lambda\lambda}') \\ &- \frac{1}{3\theta} \left\{ \frac{m_0}{m_\epsilon} \cos \theta_S (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon + \frac{m_0}{m_{\epsilon'}} \sin \theta_S (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \epsilon' \right\}\end{aligned}\quad (29)$$

Durch Spurbildung gewinnt man hieraus die Beziehung

$$T_\lambda^\lambda = -\frac{m_0 m_\epsilon}{\theta} \cos \theta_S \epsilon - \frac{m_0 m_{\epsilon'}}{\theta} \sin \theta_S \epsilon' \quad (30)$$

die erwartungsgemäß in Übereinstimmung mit der Quelle-Feld-Identität (56) aus § 1 dieses Kapitels steht, falls man dort für ϵ^0 die Transformationsgleichung (27) heranzieht.

3.1 b Zum experimentellen Stand der O^+ -Mesonen

Wir hatten oben bereits darauf hingewiesen, daß die Massen und Zerfallsbreiten der meisten O^+ -Mesonen bisher äußerst ungenau gemessen sind. Der folgende Überblick über den experimentellen Stand dieser Teilchen soll

dies verdeutlichen. Aus ihm wird auch hervorgehen, warum es zur Zeit wenig sinnvoll ist, theoretische Voraussagen quantitativer Art über die Kopplung der O^+ -Mesonen an Hadronen zu machen.

Von den oben genannten Kandidaten für das O^+ -Nonett - dem ϵ^- , ϵ'^- , δ^- und κ^- -Meson - sind bis heute nur die Massen des ϵ' (das oft auch mit S^* bezeichnet wird) und des δ genau gemessen. Nach der neuesten Liste der Elementarteilchen⁸⁷ ist $m_{\epsilon'} = (993 \pm 5)$ MeV und $m_{\delta} = (976 \pm 10)$ MeV. Die Masse des κ^- -Mesons wird i.a. zwischen 1100 und 1300 MeV vermutet, jedoch gibt es auch Experimente, die auf eine Masse von nur ca. 1 GeV schließen lassen⁸⁷. Was das ϵ^- -Meson angeht, so ist die Lage noch verworrener. I.a. wird diesem Teilchen, das stark an das 2-Pionen-System koppelt, eine Masse von 600 bis 700 MeV zugeschrieben. Andere Experimente deuten dagegen auf einen sehr viel höheren Wert hin, der bei 1050 MeV liegt. In einer kürzlich erschienenen Arbeit von Morgan⁸⁸ schließlich werden beide Werte stark angezweifelt. Morgan identifiziert das ϵ^- -Meson mit einer $\pi\pi$ -Resonanz bei 1300 MeV. Das von ihm in diesem Energiebereich lokalisierte ϵ hat ungefähr die gleiche Masse wie die $\pi\pi$ -Resonanz, die in einem Physics Reports Artikel von Rosner⁸⁹ mit ϵ' bezeichnet wird. Jedoch wird bei Rosner neben diesem ϵ' und dem oben genannten ϵ' bzw. S^* auch noch das ϵ mit einer Masse von ca. 700 MeV genannt. D.h. Rosner geht von der Existenz dreier isoskalarer O^+ -Mesonen aus, auf die Estabrooks⁹⁰ aus neuesten $\pi\pi$ -Streudaten schloß. Die Existenz von drei isoskalaren O^+ -Mesonen würde natürlich die Situation im Hinblick auf das Mischungsproblem erheblich komplizieren. Statt eines einzigen Mischungswinkels, der zur Beschreibung der Mischung von nur zwei isoskalaren O^+ -Mesonen ausreicht, brauchte man jetzt drei solche Winkel. Entsprechende Modelle sind von Carruthers⁹¹ und Rosner⁸⁹ betrachtet worden, jedoch liefern sie unvernünftig hohe Breiten für den Zerfall des ϵ -Mesons in zwei Pionen. Selbst wenn man von der Existenz nur zweier isoskalarer O^+ -Mesonen ausgeht, so ist das Mischungsproblem noch nicht gelöst, weil die Masse des κ^- -Mesons zu ungenau bestimmt ist. Zwar sind in der Literatur Angaben über den Mischungswinkel gemacht worden^{84,87,91-94}, jedoch schwanken die Werte - je nach Ausgangsdaten - zwischen ungefähr 0° und 70° .

Auch über die Zerfallsbreiten der O^+ -Mesonen liegen bisher nur wenige experimentelle Daten vor. Hinsichtlich der Breite $\Gamma_{\epsilon \rightarrow \pi\pi}$ bestehen sowohl auf experimenteller wie auf theoretischer Basis gewisse Vermutungen. Nimmt man für das ϵ -Meson eine Masse von ca. 700 MeV an, so sollte nach dem Experiment $\Gamma_{\epsilon \rightarrow \pi\pi}$ zwischen 400 und 600 MeV liegen⁸⁷. Dieser Schätzwert deckt sich mit theoretischen Abschätzungen, die auf dem ϕ -Modell oder Überlegungen zur gebrochenen Skaleninvarianz⁹⁸ beruhen. Über die Partialbreiten des ϵ' (bzw. S^*)-Mesons, das sowohl an das $\pi\pi$ - wie an das $K\bar{K}$ -System koppelt, läßt sich zur Zeit noch nichts Genaues sagen. Man weiß nur, daß die Gesamtbreite $\Gamma_{\epsilon'}^{\text{total}} = (40 \pm 8)$ MeV ist⁸⁷. Von den Breiten des δ - und κ -Mesons ist bisher nur $\Gamma_{\delta \rightarrow \eta\pi}$ einigermaßen genau gemessen worden, und zwar ist nach der neuesten Rosenfeld-Tabelle⁸⁷ $\Gamma_{\delta \rightarrow \eta\pi} = (50 \pm 20)$ MeV. Auch über die Breiten $\Gamma_{\kappa \rightarrow \pi\kappa}$ und $\Gamma_{\kappa \rightarrow \eta\kappa}$ ist bis jetzt nichts Genaues bekannt. Das Experiment besagt lediglich, daß das κ -Meson eine πK -Resonanz mit großer Breite ist. Eine im Prinzip mögliche Kopplung an das $K\eta$ -System ist bisher nicht beobachtet worden.

3.2 Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Hadronen

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Konsequenzen sich aus unserer Theorie für die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Baryonen ergeben. Es wird sich zeigen, daß in unserem Modell die meisten Voraussagen, die auf dispersionstheoretischen Ansätzen zur Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz beruhten, qualitativ reproduziert werden. Aufgrund des in Kap. I, § 3.1 beschriebenen Zusammenhangs zwischen Weyl-Transformationen und der Gruppe der konformen Transformationen im flachen Raum ist auch klar, daß insbesondere jene Voraussagen reproduziert werden, die die Kopplung des ϵ -Mesons an Hadronen betreffen und auf Überlegungen zur gebrochenen Konforminvarianz beruhten ⁹⁵⁻⁹⁹.

3.2 a Kopplung an pseudoskalare Mesonen

Wir behandeln zunächst die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen. Voraussagen über diese Kopplungen sind - soweit sie die 2^+ -Mesonen betreffen - von besonderem Interesse, weil sie anhand der gemessenen Zerfallsbreiten dieser Mesonen direkt mit dem Experiment verglichen werden können. Kurz nachdem das 2^+ -Mesonen-Nonett etabliert war und man die meisten Partialbreiten der Konstituenten dieses Nonetts gemessen hatte, verglichen bereits Glashow und Socolov ⁸³ die beobachteten Partialbreiten der 2^+ -Mesonen mit Voraussagen, die auf der SU(3)-Symmetrie und dem "mass-mixing"-Modell basierten. Die erhaltenen Ergebnisse stimmten mit dem Experiment qualitativ gut überein, und konnten später ⁸⁴, als genauere Messungen und gesichertere Inputs vorlagen, in noch bessere Übereinstimmung mit dem Experiment gebracht werden. Im Rahmen der dispersionstheoretischen Formulierung der TMD untersuchte schließlich auch Raman ¹⁰⁰ die Kopplung der isoskalaren 2^+ -Mesonen, des f - und f' -Mesons, an pseudoskalare Mesonen, und zwar unter Zugrundelegung des "mass-mixing"-Modells und des Quark-Modells. Seine Resultate für die f - und f' -Zerfallsbreiten passen sich an die eben erwähnten SU(3)-Voraussagen genauso gut an wie diejenigen, die Wess ²¹ aus dem eingangs zitierten Lagrangemodell der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz gewann. Da das Modell von Wess

- abgesehen von der dort ebenfalls realisierten SMD - im Kern mit dem von ISS übereinstimmt und wir uns hier auf letzteres gestützt haben, ist es nicht verwunderlich, wenn in unserem Modell die genannten Resultate - bis auf kleine Abweichungen - reproduziert werden.

Die Lagrangefunktion des Oktetts der pseudoskalaren Mesonen enthält neben einem SU(3)-symmetrischen Anteil einen die SU(3)-Symmetrie brechenden Anteil, der - per "mass mixing" - die Massenaufspaltung innerhalb dieses Oktetts beschreibt⁸⁵. Mischungseffekte lassen wir hier der Einfachheit halber außer acht, da der (mit der quadratischen Massenformel von Gell-Mann-Okubo berechnete) Mischungswinkel relativ klein ist ($\theta_p \approx 10^\circ$)¹⁰¹. Wir identifizieren also das η mit dem η^8 und das η^0 mit dem η^1 . Bei Benutzung der SU(3)-Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \end{pmatrix}$$

lautet dann die uns interessierende Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}^\varphi(P; f) = \mathcal{L}^\varphi_{\text{inv}}(P; f) + \mathcal{L}^\varphi_{\text{br}}(P; f) \quad (1)$$

mit

$$\mathcal{L}^\varphi_{\text{inv}}(P; f) = \frac{1}{2} \sqrt{-f} \text{Sp}[\hat{P}_{,\mu} \hat{f}^{\mu\nu} \hat{P}_{,\nu} - M_\pi^2 \hat{P}^2] \quad (2)$$

und

$$\mathcal{L}^\varphi_{\text{br}}(P; f) = -\frac{1}{2} \sqrt{-f} \text{Sp}[\delta M_\pi^2 \hat{P} \lambda_8 \hat{P}] \quad (3)$$

wobei wir aus Gründen der Weylinvarianz wieder mit Feldern vom Weylgewicht Null ($\hat{f}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \hat{f}^{-2}$, $\hat{P} = P \hat{f}^{-1}$) arbeiten.

Die unter SU(3)- und Weyl-Transformationen invariante Lagrangefunktion der Wechselwirkung zwischen dem Oktett der pseudoskalaren Mesonen und dem Oktett der 2^+ - bzw. 0^+ -Mesonen ist gegeben durch^{83,91}

$$\mathcal{L}^\varphi_{\text{int}}(T, P; f) = g_{\text{TPP}} \sqrt{2} \text{Sp}[\sqrt{-f} \hat{T}_{\kappa\lambda} \hat{f}^{\kappa\varrho} \hat{f}^{\lambda\sigma} \hat{P}_{,\varrho} \hat{P}_{,\sigma}] \quad (4)$$

bzw.

$$\mathcal{L}^\varphi_{\text{int}}(S, P; f) = g_{\text{SPP}} \sqrt{2} \text{Sp}[\sqrt{-f} \hat{S} \hat{P} \hat{P}] \quad (5)$$

Die Entwicklung der Lagrangefunktionen (2) bis (5) nach $\kappa_f \bar{F}_{\mu\nu}$ bzw. $\mathcal{A}\varepsilon^0$ liefert folgende bilineare Wechselwirkungsterme:

$$\mathcal{L}_{int}(F^0, P) = \tilde{\kappa}_f \tilde{F}_{\mu\nu}^0 Sp [P^{\mu\nu} P^{\lambda\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (P_{,\lambda} P^{\lambda\lambda} - [M_p^2 + \lambda_g \delta M_p^2] P^2)]$$

$$\mathcal{L}_{int}(T, P) = g_{Tpp} \sqrt{2} Sp [T_{\mu\nu} P^{\mu\lambda} P^{\lambda\nu}]$$

und

$$\mathcal{L}_{int}(\varepsilon^0, P) = -\mathcal{G} Sp [P P_{,\lambda} \varepsilon^{0,\lambda} + (M_p^2 + \lambda_g \delta M_p^2) P^2 \varepsilon^0]$$

$$\mathcal{L}_{int}(S, P) = g_{spp} \sqrt{2} Sp [S P^2]$$

Die Ausführung der Spuroperation ergibt im einzelnen:

$$\mathcal{L}_{int}(F^0, P) = \tilde{\kappa}_f \tilde{F}_{\mu\nu}^0 \{ T_{\pi}^{\mu\nu} + T_{\kappa}^{\mu\nu} + T_{\eta}^{\mu\nu} \}$$

mit den Energie-Impuls-Tensoren

$$T_{\pi}^{\mu\nu} = \pi^{\mu,\lambda} \pi^{\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\pi_{,\lambda} \pi^{\lambda,\lambda} - m_{\pi}^2 \pi^2)$$

$$T_{\kappa}^{\mu\nu} = 2 \{ \bar{K}^{\mu,\lambda} K^{\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\bar{K}_{,\lambda} K^{\lambda,\lambda} - m_{\kappa}^2 \bar{K} K) \}$$

$$T_{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu,\lambda} \eta^{\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\eta_{,\lambda} \eta^{\lambda,\lambda} - m_{\eta}^2 \eta^2)$$

Ferner

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(T, P) = & \frac{g_{Tpp}}{\sqrt{3}} \{ \tilde{F}_{\mu\nu}^0 [\pi^{\mu,\lambda} \pi^{\lambda,\nu} - \bar{K}^{\mu,\lambda} K^{\lambda,\nu} - \eta^{\mu,\lambda} \eta^{\lambda,\nu}] \\ & + \tilde{A}_{2\mu\nu} [2 \pi^{\mu,\lambda} \eta^{\lambda,\nu} + \bar{K}^{\mu,\lambda} \pi^{\lambda,\nu} \sqrt{3}] \\ & + [\pi^{\mu,\lambda} \bar{K}^{\lambda,\nu} \tilde{c} K_{N\mu\nu} \sqrt{3} + H.c.] \\ & - [\eta^{\mu,\lambda} \bar{K}^{\lambda,\nu} K_{N\mu\nu} + H.c.] \} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\varepsilon^0, P) = & -\mathcal{G} \{ [\pi \pi_{,\lambda} \varepsilon^{0,\lambda} + m_{\pi}^2 \pi^2 \varepsilon^0] \\ & + 2 [\bar{K} K_{,\lambda} \varepsilon^{0,\lambda} + m_{\kappa}^2 \bar{K} K \varepsilon^0] \\ & + [\eta \eta_{,\lambda} \varepsilon^{0,\lambda} + m_{\eta}^2 \eta^2 \varepsilon^0] \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(S, \mathcal{P}) = & \frac{1}{\sqrt{3}} g_{\text{SPP}} \{ \epsilon^0 [\vec{\pi}^2 - \vec{K} \cdot \vec{K} - \eta^2] \\ & + \vec{\sigma} [2 \vec{\pi} \cdot \vec{\eta} + \vec{K} \cdot \vec{\pi} \sqrt{3}] \\ & + [\vec{\pi} \cdot \vec{K} \cdot \vec{\pi} \sqrt{3} + \text{H.c.}] \\ & - [\eta \vec{K} \cdot \vec{K} + \text{H.c.}] \} \end{aligned}$$

In diesen Wechselwirkungstermen haben wir für $F_{\mu\nu}^0$, $F_{\mu\nu}^8$, ϵ^0 und ϵ^8 die Ausdrücke (25) bis (28) aus § 3.1 a dieses Kapitels einzusetzen, um die Kopplung der physikalischen Felder $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}^8$, ϵ und ϵ^8 an die pseudo-skalaren Mesonen zu erhalten.

Für das f^- - und f'^- -Meson liefert diese Substitution folgende on-shell-Kopplungskonstanten:

$$\begin{aligned} g_{f\pi\pi} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T - \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{M_8} \sin \theta_T \\ g_{fK\bar{K}} &= 2 \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T + \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{M_8} \sin \theta_T \\ g_{f\eta\eta} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T + \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{M_8} \sin \theta_T \\ g_{f'\pi\pi} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T + \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_{f'}}{M_8} \cos \theta_T \\ g_{f'K\bar{K}} &= 2 \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T - \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_{f'}}{M_8} \cos \theta_T \\ g_{f'\eta\eta} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T - \frac{g_{\text{TDP}}}{\sqrt{3}} \frac{M_{f'}}{M_8} \cos \theta_T \end{aligned}$$

Die Kopplungskonstanten für das A_2 und K_N sind gegeben durch

$$g_{A_2\pi\eta} = \frac{2}{\sqrt{3}} g_{\text{TDP}} \quad g_{A_2K\bar{K}} = g_{\text{TDP}}$$

und

$$g_{K_N\pi\pi} = g_{\text{TDP}} \quad g_{K_N\eta\eta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} g_{\text{TDP}}$$

Der experimentelle Wert dieser Konstanten ergibt sich aus den Zerfallsbreiten

$$\begin{aligned} \Gamma_{f \rightarrow \pi\pi} &= \frac{G_{f\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{2}{5} \frac{P_{\pi\pi}^{\text{f}}}{M_f^2} & \Gamma_{f \rightarrow K\bar{K}} &= \frac{G_{fK\bar{K}}^2}{4\pi} \frac{2}{15} \frac{P_{K\bar{K}}^{\text{f}}}{M_f^2} & \Gamma_{f \rightarrow \eta\eta} &= \frac{G_{f\eta\eta}^2}{4\pi} \frac{1}{15} \frac{P_{\eta\eta}^{\text{f}}}{M_f^2} \\ \Gamma_{f' \rightarrow \pi\pi} &= \frac{G_{f'\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{2}{5} \frac{P_{\pi\pi}^{\text{f}'}}{M_{f'}^2} & \Gamma_{f' \rightarrow K\bar{K}} &= \frac{G_{f'K\bar{K}}^2}{4\pi} \frac{2}{15} \frac{P_{K\bar{K}}^{\text{f}'}}{M_{f'}^2} & \Gamma_{f' \rightarrow \eta\eta} &= \frac{G_{f'\eta\eta}^2}{4\pi} \frac{1}{15} \frac{P_{\eta\eta}^{\text{f}'}}{M_{f'}^2} \end{aligned}$$

^{†)} s. Fußnote auf der nächsten Seite!

sowie

$$\begin{aligned}\Gamma_{A_2 \rightarrow \pi\eta} &= \frac{G_{A_2\pi\eta}^2}{4\pi} \frac{1}{15} \frac{p_{\pi\eta}^2}{M_{A_2}^4} ; & \Gamma_{A_2 \rightarrow K\bar{K}} &= \frac{G_{A_2K\bar{K}}^2}{4\pi} \frac{2}{15} \frac{p_{K\bar{K}}^5}{M_{A_2}^4} \quad +) \\ \Gamma_{K_N \rightarrow \pi K} &= \frac{G_{K_N\pi K}^2}{4\pi} \frac{1}{5} \frac{p_{\pi K}^2}{M_{K_N}^4} & \Gamma_{K_N \rightarrow \eta K} &= \frac{G_{K_N\eta K}^2}{4\pi} \frac{1}{15} \frac{p_{\eta K}^5}{M_{K_N}^4}\end{aligned}$$

Die dimensionslosen Kopplungskonstanten $G_{f\pi\pi}$, $G_{f'\pi\pi}$ etc. sind hierbei durch die jeweiligen Resonanzmassen zu dividieren, um mit den oben angegebenen Kopplungskonstanten $g_{f\pi\pi}$, $g_{f'\pi\pi}$ etc. verglichen werden zu können. Letztere werden allein durch die hadronische "Gravitationskonstante" $\tilde{\omega}_f$ und die universelle Oktett-Kopplungskonstante g_{TPP} bestimmt. Um uns über die Kenntnis zu verschaffen, benutzen wir zwei experimentell vorgegebene Zerfallsbreiten, und bestimmen mit den daraus errechneten Werten von $\tilde{\omega}_f$ und g_{TPP} die übrigen Kopplungskonstanten. Als ersten Input wählen wir die experimentell gut bestimmte Zerfallsbreite $\Gamma_{f \rightarrow \pi\pi}$. Aus $\Gamma_{f \rightarrow \pi\pi} = 140 \text{ MeV}^{87}$ ergibt sich $|G_{f\pi\pi}| = 11,2$ bzw. $|g_{f\pi\pi}| = |G_{f\pi\pi}|/M_f = 8,83 \text{ GeV}^{-1}$. Was den zweiten Input angeht, so liegt es nahe, die vom Experiment am nächst besten gesicherte Zerfallsbreite $\Gamma_{K_N \rightarrow \pi K}$ zu wählen. Mit $\Gamma_{K_N \rightarrow \pi K} = 55 \text{ MeV}$ findet man $|G_{K_N\pi K}| = 12,6$ bzw. $|g_{K_N\pi K}| = |G_{K_N\pi K}|/M_{K_N} = 8,86 \text{ GeV}^{-1}$. Die extrem schwache Kopplung des f' an das 2-Pionen-System besagt nun, daß $\tilde{\omega}_{f'}$ und g_{TPP} entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. Mit $g_{\text{TPP}} = -8,87 \text{ GeV}^{-1}$ und $g_{f\pi\pi} = 8,83 \text{ GeV}^{-1}$ findet man dann $\tilde{\omega}_f = 8,27 \text{ GeV}^{-1}$ bzw. $\tilde{\omega}_{f'} = 0,12 \text{ GeV}$.

Als anderen zweiten Input könnte man auch - wie Wess²¹ und Raman¹⁰⁰ es getan haben - die vom Quarkmodell¹⁰² nahegelegte, vom Experiment aber nicht bestätigte Annahme benutzen, daß die $f'\pi\pi$ -Kopplung identisch verschwindet (das Experiment besagt lediglich $\Gamma_{f' \rightarrow \pi\pi} < 0,2 \Gamma_{f'}^{\text{total}}$). Diese Annahme gestattet es dann, die beiden Kopplungskonstanten $\tilde{\omega}_f$ und g_{TPP} miteinander in Beziehung zu setzen. Denn aus $g_{f'\pi\pi} = 0$ folgt die Proportionalitätsbeziehung

$$g_{\text{TPP}} = -\sqrt{3} \frac{M_\pi}{M_\omega} \tan \theta_T \tilde{\omega}_f = -0,87 \tilde{\omega}_f$$

+) Die Größen $p_{\pi\pi}$..., $p_{\pi\eta}$... bedeuten die Impulse der Zerfallsprodukte in deren Schwerpunktsystem.

Mit Hilfe dieser Beziehung lassen sich dann sämtliche Kopplungskonstanten durch die eine Konstante $\tilde{K}_f$ und den Mischungswinkel θ_T ausdrücken. So ist zum Beispiel

$$g_{f\pi\pi} = \tilde{K}_f \frac{M_f}{M_\pi} \cos \theta_T (1 + \tan^2 \theta_T)$$

Mit dem oben angegebenen Wert für $g_{f\pi\pi}$ ergibt sich hieraus ebenfalls $\tilde{K}_f = 8,27 \text{ GeV}^{-1}$ bzw. $\tilde{K}_f = 0,120 \text{ GeV}$, jedoch $g_{T\pi\pi} = -7,2$.

In der unteren Tab. sind die vorausgesagten Werte für die Zerfallsbreiten zusammengestellt, die sich aus den beiden verschiedenen Inputs ergeben. Ein Vergleich mit den ebenfalls angegebenen experimentellen Werten deutet darauf hin, daß die Annahme $g_{f'\pi\pi} = 0$ in der Tat zu stark ist; die mit diesem Input errechneten Werte von $\Gamma_{A_2 \rightarrow \eta\pi}$ und $\Gamma_{K_N \rightarrow \pi K}$ sind so klein, daß sie selbst bei Berücksichtigung der Meßungenauigkeit mit dem Experiment nicht mehr verträglich sind. Dagegen stimmen die mit dem ersten Input, d.h. mit $\Gamma_{f \rightarrow \pi\pi}$ und $\Gamma_{K_N \rightarrow \pi K}$, berechneten Zerfallsbreiten mit den experimentell bestimmten gut überein.

Tabelle: Zerfälle der 2^+ -Mesonen in pseudoskalare Mesonen

Meson	Beobachtete Gesamtbreite in MeV	Zerfallsart	Beobachtete Partialbreite in MeV	Vorausgesagte Partialbreite bei verschiedenen Inputs in MeV	
f(1270)	170 ± 30	$\pi\pi$	141 ± 8,5	<u>140</u> ⁺⁾	<u>140</u> ⁺⁾
		$K\bar{K}$	6,8 ± 5,1	10,9	10,9
		$\eta\eta$	-	0,4	0,6
$A_2(1310)$	100 ± 10	$\pi\eta$	15,2 ± 1,2	13,5	8,9
		$K\bar{K}$	4,7 ± 0,6	7,0	4,6
$K_N(1420)$	100 ± 10	$K\pi$	55,0 ± 2,7	<u>55</u> ⁺⁾	36,6
		$K\eta$	2,0 ± 2,0	1,6	1,2
f'(1514)	40 ± 10	$K\bar{K}$	40,0 ± 10	45,7	39,6
		$\pi\pi$	< 8 ⁺⁺⁾	2,5	<u>0</u> ⁺⁾
		$\eta\eta$	< 20 ⁺⁺⁾	6,2	5,0

⁺⁾ Inputdaten

⁺⁺⁾ Empirische obere Grenze

Die Voraussagen, die wir für die Kopplung der O^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen machen können, fallen wesentlich bescheidener aus. Denn wie wir oben gesehen haben, stehen uns zu wenig experimentelle Daten zur Verfügung, als daß wir präzise Angaben über die uns interessierenden Kopplungen machen könnten. Wir werden uns daher im wesentlichen darauf beschränken, allein die formalen Ausdrücke für die verschiedenen Kopplungskonstanten anzugeben, wie sie sich aus unserer Theorie ergeben. Die in diesem Zusammenhang relevanten Wechselwirkungsterme $\mathcal{L}_{int}(\epsilon^0, P)$ und $\mathcal{L}_{int}(S, P)$ waren gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int}(\epsilon^0, P) = & -6 \left\{ [\pi \vec{\pi}^{\lambda} \epsilon^0_{,\lambda} + m_{\pi}^2 \vec{\pi}^2 \epsilon^0] \right. \\ & + 2 [\bar{K} K^{\lambda} \epsilon^0_{,\lambda} + m_K^2 \bar{K} K \epsilon^0] \\ & \left. + [\eta \eta^{\lambda} \epsilon^0_{,\lambda} + m_{\eta}^2 \eta^2 \epsilon^0] \right\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int}(S, P) = & \frac{1}{\sqrt{3}} g_{\text{SPP}} \left\{ \epsilon^0 [\vec{\pi}^2 - \bar{K} K - \eta^2] \right. \\ & + \delta [2 \pi \vec{\pi} \times \bar{K} \vec{\pi} K \sqrt{3}] \\ & + [\pi \bar{K} \vec{\pi} \times \sqrt{3} + \text{H.c.}] \\ & \left. - [\eta \bar{K} K + \text{H.c.}] \right\}\end{aligned}$$

Wie oben bereits bemerkt, haben wir hierin für ϵ^0 und ϵ' die Ausdrücke (27) und (28) aus § 3.1 a dieses Kapitels einzusetzen, um zur Kopplung der physikalischen Teilchen ϵ und ϵ' an die pseudoskalaren Mesonen zu gelangen. Doch dies allein genügt nicht: denn substituiert man in $\mathcal{L}_{int}(F^0, P)$ und $\mathcal{L}_{int}(T, P)$ $F_{\mu\nu}^0$ und $F_{\mu\nu}^8$ durch die Ausdrücke (25) und (26) aus § 3.1 a dieses Kapitels, so erhält man für das ϵ und ϵ' zusätzliche Wechselwirkungsterme, die linear in den zweiten Ableitungen dieser Felder sind. Der Anteil von $F_{\mu\nu}^0$ mit den Ableitungen von ϵ und ϵ' liefert jedoch für die effektive Wechselwirkung keinen Beitrag, da das $F_{\mu\nu}^0$ an den EIT der pseudoskalaren Mesonen koppelt und dessen Divergenz verschwindet. Der von $F_{\mu\nu}^8$ herrührende Beitrag dagegen ist so klein, daß wir ihn vernachlässigen können und letzten Endes doch nur $\mathcal{L}_{int}(\epsilon^0, P)$ und $\mathcal{L}_{int}(S, P)$ in Betracht zu ziehen brauchen.

Liegen das ε und ε' auf der Massenschale, so erhält man nach partieller Integration folgende Ausdrücke für die uns interessierenden ε - und ε' -Kopplungskonstanten:

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon\pi\pi} &= -6 \left(\frac{1}{2} m_\varepsilon^2 + m_\pi^2 \right) \frac{m_\varepsilon}{m_0} \cos \theta_s - \frac{g_{SPP}}{\sqrt{3}} \frac{m_\varepsilon}{m_s} \sin \theta_s \\ g_{\varepsilon KK} &= -26 \left(\frac{1}{2} m_\varepsilon^2 + m_K^2 \right) \frac{m_\varepsilon}{m_0} \cos \theta_s + \frac{g_{SPP}}{\sqrt{3}} \frac{m_\varepsilon}{m_s} \sin \theta_s \\ g_{\varepsilon\eta\eta} &= -6 \left(\frac{1}{2} m_\varepsilon^2 + m_\eta^2 \right) \frac{m_\varepsilon}{m_0} \cos \theta_s + \frac{g_{SPP}}{\sqrt{3}} \frac{m_\varepsilon}{m_s} \sin \theta_s \\ g_{\varepsilon'\pi\pi} &= -6 \left(\frac{1}{2} m_{\varepsilon'}^2 + m_\pi^2 \right) \frac{m_{\varepsilon'}}{m_0} \sin \theta_s + \frac{g_{SPP}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\varepsilon'}}{m_s} \cos \theta_s \\ g_{\varepsilon'KK} &= -26 \left(\frac{1}{2} m_{\varepsilon'}^2 + m_K^2 \right) \frac{m_{\varepsilon'}}{m_0} \sin \theta_s - \frac{g_{SPP}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\varepsilon'}}{m_s} \cos \theta_s \end{aligned}$$

Die anderen Kopplungskonstanten sind - ähnlich wie im Fall der Tensor-mesonen - gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon\pi\eta} &= \frac{2}{\sqrt{3}} g_{SPP} & g_{\varepsilon'K\pi} &= g_{SPP} \\ g_{K\pi K} &= g_{SPP} & g_{K\eta K} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} g_{SPP} \end{aligned}$$

Bemerkt sei an dieser Stelle, daß sich unser Ergebnis für die ε -Kopplungskonstanten in völliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren^{21,103} befindet, wenn man die von ihnen nicht betrachtete ε - ε' -Mischung ausschaltet, d.h. $\theta_s = 0$ setzt. Schließlich sei auch darauf hingewiesen, daß für $\theta_s = 0$ die effektive Kopplung des ε -Mesons an die pseudoskalaren Mesonen mit jener übereinstimmt, die man erhält, wenn man das ε an die Spur des EIT der pseudoskalaren Mesonen koppelt¹⁰⁴. Natürlich war dies aufgrund der Bewegungsgleichung (18) aus Kap. III, § 2, der das ε bzw. ε' genügt, auch zu erwarten.

Direkte Information über den Wert obiger Kopplungskonstanten gewinnt man aus den experimentell bestimmbaren Breiten

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon \rightarrow \pi\pi} &= \frac{G_{\varepsilon\pi\pi}^2}{4\pi} 3p_{\pi\pi} & \Gamma_{\varepsilon \rightarrow K\bar{K}} &= \frac{G_{\varepsilon KK}^2}{4\pi} p_{K\bar{K}} & \Gamma_{\varepsilon \rightarrow \eta\eta} &= \frac{G_{\varepsilon\eta\eta}^2}{4\pi} \frac{1}{2} p_{\eta\eta}^{+)} \\ \Gamma_{\varepsilon' \rightarrow \pi\pi} &= \frac{G_{\varepsilon'\pi\pi}^2}{4\pi} 3p_{\pi\pi} & \Gamma_{\varepsilon' \rightarrow K\bar{K}} &= \frac{G_{\varepsilon'K\bar{K}}^2}{4\pi} p_{K\bar{K}} \end{aligned}$$

^{+) Die für $\Gamma_{\varepsilon \rightarrow K\bar{K}}$ und $\Gamma_{\varepsilon \rightarrow \eta\eta}$ angegebenen Ausdrücke sind natürlich nur sinnvoll, wenn m_ε tatsächlich sehr groß ist - etwa gleich 1,3 GeV, wie von Morgan⁸⁸ angenommen.}

sowie

$$\Gamma_{\delta \rightarrow \pi \eta} = \frac{G_{\delta \eta \pi}^2}{4\pi} \frac{1}{2} P_{\pi \eta} \quad \Gamma_{\kappa \rightarrow \pi \kappa} = \frac{G_{\kappa \pi \kappa}^2}{4\pi} \frac{3}{2} P_{\pi \kappa} \quad \Gamma_{\kappa \rightarrow \kappa \eta} = \frac{G_{\kappa \kappa \eta}^2}{4\pi} \frac{1}{2} P_{\kappa \eta}$$

wobei die hierin auftretenden, dimensionslosen Kopplungskonstanten mit den oben benutzten identisch werden, wenn man sie mit der jeweiligen Resonanzmasse multipliziert.

Leider ist von den soeben aufgeschriebenen Zerfallsbreiten kaum eine genau bekannt: Nur $\Gamma_{\delta \rightarrow \eta \pi}$ ist, wie wir bereits wissen, einigermaßen genau gemessen. Benutzt man $\Gamma_{\delta \rightarrow \eta \pi} \approx 60$ MeV, so erhält man mit $m_{\kappa} \approx 1,2$ GeV die SU(3)-Voraussagen $\Gamma_{\kappa \rightarrow \pi \kappa} = 140$ MeV und $\Gamma_{\kappa \rightarrow \eta \kappa} = 12$ MeV. Diese Voraussagen widersprechen zwar nicht dem Experiment, decken sich aber nicht mit anderen theoretischen Abschätzungen, die dem κ -Meson eine Breite von $400 - 600$ MeV zuschreiben ¹⁰⁵.

Um weitere Voraussagen machen zu können, benötigen wir experimentelle Daten über wenigstens eine der Breiten der ϵ - oder ϵ' -Resonanzen. Auch eine relativ genaue Bestimmung der κ - und ϵ -Masse ist erforderlich, um - wie wir oben bemerkt haben - eine Entscheidung über den Mischungswinkel treffen zu können.

Wir geben an dieser Stelle lediglich noch eine Abschätzung für die universelle Konstante b , da sie eine ähnlich fundamentale Rolle spielt wie die hadronische "Gravitationskonstante" $\tilde{\alpha}_f$ und im folgenden immer wieder auftreten wird. Aus der auf Seite 110 angegebenen Beziehung für $g_{\epsilon \pi \pi}$ folgt:

$$b = - \left(\frac{g_{\epsilon \pi \pi}}{m_{\epsilon}} + \frac{g_{\epsilon \pi \pi}}{f_3} \frac{1}{m_g} \sin \theta_s \right) \frac{m_0}{\frac{1}{2} m_{\epsilon}^2 + m_{\pi}^2} \frac{1}{\cos \theta_s}$$

Um zu einer groben Abschätzung für b zu gelangen, gehen wir von zwei extremen Standpunkten aus, wie sie in der Literatur vertreten werden:

1. Wir identifizieren das ϵ -Meson mit einer bei 700 MeV vermuteten $\pi \pi$ -Resonanz von der Breite 400 MeV, so daß

$$|g_{\epsilon \pi \pi}| = m_{\epsilon} \cdot |G_{\epsilon \pi \pi}| = m_{\epsilon} \cdot 2,28 = 1,6 \text{ GeV}$$

Darüberhinaus nehmen wir an, das ϵ -Meson sei ein reines SU(3)-Singlett und setzen dementsprechend $\theta_s = 0$. Dieser Fall entspricht der experimentellen Situation, von der die unter ^{91,98, 103, 104} genannten Autoren ausgegangen sind. Mit der zusätzlichen, vom σ -Modell nahegelegten Annahme, daß $G_{\epsilon\pi\pi}$ negativ ist, folgt dann:

$$b = 6,05 \text{ GeV}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad b^{-1} = 0,165 \text{ GeV}$$

Dieser Wert von b bzw. b^{-1} stimmt qualitativ gut überein mit den von Carruthers bzw. Ellis ^{91, 96} errechneten Wert.

2. Dem Vorschlag von Morgan ⁸⁸ folgend, lokalisieren wir die ϵ -Masse bei 1,3 GeV und nehmen eine Breite von ca. 100 MeV an. Damit wird

$$|g_{\epsilon\pi\pi}| = m_\epsilon |G_{\epsilon\pi\pi}| = m_\epsilon \cdot 0,812 = 1,06 \text{ GeV}$$

Mit dem von Morgan ermittelten Mischungswinkel $\theta_c = 69^\circ$ und der Annahme, daß neben $G_{\epsilon\pi\pi}$ auch $g_{\sigma\pi\pi}$ negativ ist, folgt dann (mit $m_\pi = 1,15 \text{ GeV}$)

$$b = 5,3 \text{ GeV}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad b^{-1} = 0,187 \text{ GeV}$$

Dieser Wert liegt dicht bei dem unter 1. erhaltenen Wert. Für spätere Abschätzungen benutzen wir $b \approx 6 \text{ GeV}^{-1}$.

3.2 b Kopplung an Vektormesonen

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Vektormesonen, die eine entscheidende Rolle spielt im Zusammenhang mit deren Strahlungszерfällen. Für letztere sind von verschiedenen Autoren - und zwar von Schrempf¹⁰⁶, Renner¹⁰⁸ und Kleinert¹⁰⁷ - Abschätzungen durchgeführt worden, die - soweit sie den 2-Photonen-Zerfall des f -Mesons angehen - qualitativ gut miteinander übereinstimmen. Während Schrempf hierbei von unendlichen Summenregeln für die Pion-Compton-Steuerung ausging, benutzten Renner und Kleinert die Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz in Verbindung mit der Vektormesonen-Dominanz, d.h. sie koppelten die Tensor- bzw. Skalarmesonen über intermediäre Vektormesonen an das Photonfeld. Um die hierfür erforderliche Kopplungsstärke von Tensor- und Skalarmesonen an Vektormesonen abzuschätzen, ging Renner von einem Poldominanzmodell für die im Matrixelement $\langle V | T_{\mu\nu} | V' \rangle$ auftretenden Formfaktoren aus, während Kleinert¹⁰⁷ Ward-Identitäten für den $T_{\mu\nu} V_\lambda V_\sigma$ - Vertex benutzte. Die genannten Kopplungen sollen hier aus einer effektiven Lagrangefunktion hergeleitet werden.

Schreiben wir zunächst die Lagrangefunktion des Vektormesonen-Nonetts auf. Sie enthält neben dem SU(3)-invarianten $8 \oplus 1$ -Anteil einen die SU(3)-Symmetrie brechenden Anteil, der die Massenaufspaltung innerhalb des Oktetts und die in diesem Fall starke Mischung zwischen dem Singlett und der isoskalaren Oktett-Komponente berücksichtigt².

Ordnen wir, wie oben erläutert, den Vektorfeldern das Weylgewicht Null zu, so ist die uns interessierende weylinvariante Lagrangefunktion $\mathcal{L}^2(V, f)$ gegeben durch

$$\mathcal{L}^2(V; f) = \mathcal{L}_{\text{int}}^2(V; f) + \mathcal{L}_{\text{br}}^2(V; f) \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^2(V; f) = & -\frac{1}{2} \overline{f} f \text{Sp} \left[\frac{1}{2} V_{\mu\nu} f^{\mu\lambda} f^{\nu\sigma} V_{\lambda\sigma} - M_V^2 V_\mu f^{\mu\nu} V_\nu \overline{f} f \right] \\ & -\frac{1}{2} \overline{f} f \left[\frac{1}{2} V_{\mu\nu} f^{\mu\lambda} f^{\nu\sigma} V_{\lambda\sigma} - M_V^2 V_\mu f^{\mu\nu} V_\nu \overline{f} f \right] \end{aligned} \quad (2)$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{br}}^2(V; f) = \frac{1}{2} \overline{f} f \text{Sp} \left[\delta M_V^2 \lambda_8 V_\mu f^{\mu\nu} V_\nu \overline{f} f \right] + \frac{1}{2} \lambda_V \overline{f} f V_\mu f^{\mu\nu} V_\nu \overline{f} f \quad (3)$$

wobei V die SU(3)-Matrix der Vektormesonen bedeutet:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} V^8 & \varrho^+ & K^{*+} \\ \varrho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \varrho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} V^8 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}} V^8 \end{pmatrix}$$

und $V_{\mu\nu}$ abkürzend für den Tensor

$$V_{\mu\nu} = V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \dot{V}_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu}$$

steht.

Das Goldstone-Feld $\tilde{\varphi} = 1 + b\epsilon^a$ ist diesmal nur an die Massenterme zu koppeln, da allein diese die Weylinvarianz brechen würden.

Wir benötigen jetzt noch die SU(3)-invarianten Lagrangefunktionen der Wechselwirkung zwischen Vektormesonen und dem Oktett der 2^+ - bzw. 0^+ -Mesonen. Es sind hier jeweils zwei verschiedene Kopplungen möglich - eine mit und eine ohne Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{\varphi}(T, V; f) = & - \hat{g}_{TVV}^{(1)} \sqrt{2} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha} f^{\gamma\delta} V_{\gamma\delta}] \\ & + \hat{g}_{TVV}^{(2)} \sqrt{2} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha} V_{\beta} \tilde{\varphi}^2] \\ & - \tilde{g}_{TVV}^{(1)} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha\gamma} f^{\gamma\delta} V_{\delta\beta}] \\ & + \tilde{g}_{TVV}^{(2)} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{T}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha} V_{\beta} \tilde{\varphi}^2] \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{\varphi}(S, V; f) = & \hat{g}_{SVV}^{(1)} \sqrt{2} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{S} V_{\mu\nu} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha\beta}] \\ & + \hat{g}_{SVV}^{(2)} \sqrt{2} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{S} V_{\mu} f^{\mu\alpha} V_{\alpha} \tilde{\varphi}^2] \\ & + \tilde{g}_{SVV}^{(1)} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{S} V_{\mu\nu} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta} V_{\alpha\gamma}^{\dagger}] \\ & + \tilde{g}_{SVV}^{(2)} \operatorname{Sp}[\sqrt{f} \hat{S} V_{\mu} f^{\mu\alpha} V_{\alpha}^{\dagger} \tilde{\varphi}^2] \end{aligned} \quad (5)$$

Die geforderte Weylinvarianz bringt es mit sich, daß in diesen Wechselwirkungstermen wieder die Felder $\hat{f}$, $\hat{T}$ und $\hat{S}$ erscheinen.

Die Entwicklung der Ausdrücke (1) bis (5) nach $\kappa_f F_{\mu\nu}^0$ und $b\epsilon^0$ liefert neben der Lagrangefunktion des freien Vektormesonon-Nonetts (incl. Mischungsterm):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V = & -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{1}{2} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} - (M_V^2 + \lambda_\theta \delta M_V^2) V_\mu V^\mu \right] \\ & -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} V_{\mu\nu}^0 V^{0\mu\nu} - M_{V^0}^2 V_\mu^0 V^{0\mu} \right] + \frac{1}{2} x_V V_\mu^8 V^{0\mu}\end{aligned}$$

folgendetrilinearen Wechselwirkungsterme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int.}}(\bar{T}^0, V) = & \tilde{\kappa}_f \tilde{f}_{\mu\nu}^0 \left\{ \text{Sp} \left[-V^{\mu\sigma} V_\sigma^\nu + (M_V^2 + \lambda_\theta \delta M_V^2) V^\mu V^\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} V_{\kappa\lambda} V^{\kappa\lambda} - (M_V^2 + \lambda_\theta \delta M_V^2) V_\kappa V^\kappa \right) \right] \right. \\ & \left. + [-V^{0\mu\sigma} V_\sigma^{0\nu} + M_{V^0}^2 V_\mu^0 V^{0\mu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} V_{\kappa\lambda}^0 V^{0\kappa\lambda} - M_{V^0}^2 V_\kappa^0 V^{0\kappa} \right) \right] \\ & \left. + x_V V_\mu^8 V^{0\mu} \right\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int.}}(T, V) = & -g_{T V V}^{(1)} \sqrt{2} \text{Sp} [T_{\mu\nu} V^{\mu\sigma} V_\sigma^\nu] + g_{T V V}^{(2)} \sqrt{2} \text{Sp} [T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu] \\ & -\tilde{g}_{T V V}^{(1)} \text{Sp} [T_{\mu\nu} V^{\mu\sigma} V_\sigma^{0\nu}] + \tilde{g}_{T V V}^{(2)} \text{Sp} [T_{\mu\nu} V^\mu V^{0\nu}]\end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}(\epsilon^0, V) = b \epsilon^0 \left\{ \text{Sp} [(M_V^2 + \lambda_\theta \delta M_V^2) V_\mu V^\mu] + M_{V^0}^2 V_\mu^0 V^{0\mu} + x_V V_\mu^8 V^{0\mu} \right\}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int.}}(S, V) = & g_{S V V}^{(1)} \sqrt{2} \text{Sp} [S V_{\mu\nu} V^{\mu\nu}] + g_{S V V}^{(2)} \sqrt{2} \text{Sp} [S V_\mu V^\mu] \\ & + \tilde{g}_{S V V}^{(1)} \text{Sp} [S V_{\mu\nu} V^{0\mu\nu}] + \tilde{g}_{S V V}^{(2)} \text{Sp} [S V_\mu V^{0\mu}]\end{aligned}$$

Um die in $\mathcal{L}_V$ sowie $\mathcal{L}_{\text{int.}}(F^0, V)$ und $\mathcal{L}_{\text{int.}}(\epsilon^0, V)$ enthaltenen Mischungsterme

zu beseitigen, haben wir bzgl. V^2 und V^0 zu diagonalisieren. Dies wird bekanntlich erreicht durch die orthogonale Transformation

$$V^2 = \cos \theta_V \varphi - \sin \theta_V \omega$$

$$V^0 = \sin \theta_V \varphi + \cos \theta_V \omega$$

bzw.

$$\varphi = \cos \theta_V V^2 + \sin \theta_V V^0$$

$$\omega = -\sin \theta_V V^2 + \cos \theta_V V^0$$

wobei θ_V der Mischungswinkel ist.

Anders als im "current-mixing", erhält man jetzt

$$M_{V^2}^2 = \cos^2 \theta_V M_\varphi^2 + \sin^2 \theta_V M_\omega^2$$

$$M_{V^0}^2 = \sin^2 \theta_V M_\varphi^2 + \cos^2 \theta_V M_\omega^2$$

und

$$x_V = 2 \sin \theta_V \cos \theta_V (M_\varphi^2 - M_\omega^2)$$

Für den Mischungswinkel ergibt sich hieraus

$$\sin^2 \theta_V = \frac{M_\varphi^2 - M_{V^2}^2}{M_\varphi^2 - M_\omega^2}$$

wobei $M_{V^2}^2$ gegeben ist durch die Gell-Mann-Okubo-Massenformel

$$M_{V^2}^2 = \frac{1}{3} (4 M_{K^*}^2 - M_\pi^2)$$

Aus den experimentell bekannten Massen M_φ und M_ω ergibt sich der Mischungswinkel $\theta_V \approx 40^\circ$. Dieser "experimentelle" Mischungswinkel stimmt bekanntlich gut überein mit dem aus dem Quark-Modell gewonnenen "idealen" Mischungswinkel $\theta_V = 35,2^\circ$, den wir im folgenden benutzen werden, um unsere Ergebnisse mit denen von Renner et al. vergleichen zu können.

Nach der soeben beschriebenen Diagonalisierung liefert die Ausführung der Spuroperation folgende Wechselwirkungsterme für die 2^+ -Mesonen:

$$\mathcal{L}_{int}(\Gamma^0, V) = \tilde{\kappa}_f \bar{T}_{\mu\nu} \{ T_\varphi^{\mu\nu} + T_{K^*}^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu} + T_\omega^{\mu\nu} \}$$

mit den Energie-Impuls-Tensoren

$$T_{\varphi}^{\mu\nu} = - \vec{\varphi}^{\mu*} \vec{\varphi}^{\nu} + M_{\varphi}^2 \vec{\varphi}^{\mu} \vec{\varphi}^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\varphi}^0$$

$$T_{K^*}^{\mu\nu} = 2 \{ - \vec{K}^{\mu*} K^{\nu} + M_{K^*}^2 \vec{K}^{\mu} K^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{K^*}^0 \}$$

$$T_{\varphi}^{\mu\nu} = - \varphi^{\mu*} \varphi^{\nu} + M_{\varphi}^2 \varphi^{\mu} \varphi^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\varphi}^0$$

$$T_{\omega}^{\mu\nu} = - \omega^{\mu*} \omega^{\nu} + M_{\omega}^2 \omega^{\mu} \omega^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\omega}^0$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(T, V) = & - \frac{2^{(1)}}{\sqrt{3}} \{ F_{\mu\nu}^{\varphi} [\vec{\varphi}^{\mu*} \vec{\varphi}^{\nu} - \vec{K}^{\mu*} K^{\nu} - \cos^2 \theta_V \varphi^{\mu*} \varphi^{\nu} - \sin^2 \theta_V \omega^{\mu*} \omega^{\nu} + \sin 2\theta_V \varphi^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \vec{A}_{2\mu\nu} [2 \cos \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \varphi^{\nu} - 2 \sin \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \omega^{\nu} + \vec{K}^{\mu*} \vec{\varphi}^{\nu} K^{\nu} \sqrt{3}] \\ & + [\vec{\varphi}^{\mu*} \vec{K}^{\nu} \vec{\varphi}^{\nu} K_{N\mu\nu} \sqrt{3} + \text{H.c.}] \\ & - [\cos \theta_V \varphi^{\mu*} \vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} - \sin \theta_V \omega^{\mu*} \vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] \} \\ & + \frac{2^{(2)}}{\sqrt{3}} \{ F_{\mu\nu}^{\varphi} [\vec{\varphi}^{\mu*} \vec{\varphi}^{\nu} - K^{\mu*} K^{\nu} - \cos^2 \theta_V \varphi^{\mu*} \varphi^{\nu} - \sin^2 \theta_V \omega^{\mu*} \omega^{\nu} + \sin 2\theta_V \varphi^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \vec{A}_{2\mu\nu} [2 \cos \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \varphi^{\nu} - 2 \sin \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \omega^{\nu} + \vec{K}^{\mu*} \vec{\varphi}^{\nu} K^{\nu} \sqrt{3}] \\ & + [\vec{\varphi}^{\mu*} \vec{K}^{\nu} \vec{\varphi}^{\nu} K_{N\mu\nu} \sqrt{3} + \text{H.c.}] \\ & - [\cos \theta_V \varphi^{\mu*} \vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} - \sin \theta_V \omega^{\mu*} \vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] \} \\ & - \tilde{g}_{TVV}^{(4)} \{ F_{\mu\nu}^{\varphi} [\frac{1}{2} \sin 2\theta_V \varphi^{\mu*} \varphi^{\nu} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_V \omega^{\mu*} \omega^{\nu} + \cos 2\theta_V \varphi^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \vec{A}_{2\mu\nu} [\sin \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \varphi^{\nu} + \cos \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \sin \theta_V \varphi^{\mu*} [\vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] + \cos \theta_V \omega^{\mu*} [\vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] \} \\ & + \tilde{g}_{TVV}^{(2)} \{ F_{\mu\nu}^{\varphi} [\frac{1}{2} \sin 2\theta_V \varphi^{\mu*} \varphi^{\nu} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_V \omega^{\mu*} \omega^{\nu} + \cos 2\theta_V \varphi^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \vec{A}_{2\mu\nu} [\sin \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \varphi^{\nu} + \cos \theta_V \vec{\varphi}^{\mu*} \omega^{\nu}] \\ & + \sin \theta_V \varphi^{\mu*} [\vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] + \cos \theta_V \omega^{\mu*} [\vec{K}^{\nu} K_{N\mu\nu} + \text{H.c.}] \} \end{aligned}$$

Für die 0^+ -Mesonen ergibt sich in analoger Weise:

$$\mathcal{L}_{int}(\varepsilon^0, V) = - \tilde{g} \varepsilon^0 \{ T_{\varphi}^{\lambda}{}_{\lambda} + T_{K^*}^{\lambda}{}_{\lambda} + T_{\varphi}^{\lambda}{}_{\lambda} + T_{\omega}^{\lambda}{}_{\lambda} \}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int}(S, V) = & \frac{g_{SV}^{(1)}}{\sqrt{3}} \{ \varepsilon^{\mu} [\vec{q}_{\mu\nu} \vec{q}^{\mu\nu} - \vec{K}_{\mu\nu} K^{*\mu\nu} - \cos^2 \theta_V \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \sin^2 \theta_V \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \sin 2\theta_V \varphi_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}] \\
 & + \vec{\sigma} [2 \cos \theta_V \vec{q}_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - 2 \sin \theta_V \vec{q}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \vec{K}_{\mu\nu} \vec{K}^{*\mu\nu} \sqrt{3}] \\
 & + [\vec{q}_{\mu\nu} \vec{K}^{*\mu\nu} \vec{K} \sqrt{3} + H.c.] \\
 & - [\cos \theta_V \varphi_{\mu\nu} \vec{K}^{*\mu\nu} \vec{K} - \sin \theta_V \omega_{\mu\nu} \vec{K}^{*\mu\nu} \vec{K} + H.c.] \} \\
 & + \frac{g_{SV}^{(2)}}{\sqrt{3}} \{ \varepsilon^{\mu} [\vec{q}_{\mu} \vec{q}_{\nu} - \vec{K}_{\mu} K^{*\mu} - \cos^2 \theta_V \varphi_{\mu} \varphi^{\mu} - \sin^2 \theta_V \omega_{\mu} \omega^{\mu} + \sin 2\theta_V \varphi_{\mu} \omega^{\mu}] \\
 & + \vec{\sigma} [2 \cos \theta_V \vec{q}_{\mu} \varphi^{\mu} - 2 \sin \theta_V \vec{q}_{\mu} \omega^{\mu} + \vec{K}_{\mu} \vec{K}^{*\mu} \sqrt{3}] \\
 & + [\vec{q}_{\mu} \vec{K}^{*\mu} \vec{K} \sqrt{3} + H.c.] \\
 & - [\cos \theta_V \varphi_{\mu} \vec{K}^{*\mu} \vec{K} - \sin \theta_V \omega_{\mu} \vec{K}^{*\mu} \vec{K} + H.c.] \} \\
 & + \vec{g}_{SV}^{(3)} \{ \varepsilon^{\mu} [\frac{1}{2} \sin 2\theta_V \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_V \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \cos 2\theta_V \varphi_{\mu} \omega^{\mu\nu}] \\
 & + \vec{\sigma} [\sin \theta_V \vec{q}_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} + \cos \theta_V \vec{q}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}] \\
 & + \sin \theta_V \varphi_{\mu\nu} [\vec{K}^{*\mu\nu} \vec{K} + H.c.] + \cos \theta_V \omega_{\mu\nu} [\vec{K}^{*\mu\nu} \vec{K} + H.c.] \} \\
 & + \vec{g}_{SV}^{(4)} \{ \varepsilon^{\mu} [\frac{1}{2} \sin 2\theta_V \varphi_{\mu} \varphi^{\mu} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_V \omega_{\mu} \omega^{\mu} + \cos 2\theta_V \varphi_{\mu} \omega^{\mu}] \\
 & + \vec{\sigma} [\sin \theta_V \vec{q}_{\mu} \varphi^{\mu} + \cos \theta_V \vec{q}_{\mu} \omega^{\mu}] \\
 & + \sin \theta_V \varphi_{\mu} [\vec{K}^{*\mu} \vec{K} + H.c.] + \cos \theta_V \omega_{\mu} [\vec{K}^{*\mu} \vec{K} + H.c.] \}
 \end{aligned}$$

wobei die in $\mathcal{L}_{int}(\varepsilon, V)$ auftretenden Größen $T_{V\lambda}^A$ ($V = q, K^*, \varphi, \omega$) jeweils die Spur der oben angegebenen Energie-Impuls-Tensoren der Vektormesonen bedeuten:

$$\begin{aligned}
 T_{q\lambda}^A &= -M_q^2 \vec{q}_{\lambda} \vec{q}^{\lambda} \quad , & T_{K^*\lambda}^A &= -2M_{K^*}^2 \vec{K}_{\lambda} \vec{K}^{\lambda} \\
 T_{\varphi\lambda}^A &= -M_{\varphi}^2 \varphi_{\lambda} \varphi^{\lambda} \quad , & T_{\omega\lambda}^A &= -M_{\omega}^2 \omega_{\lambda} \omega^{\lambda}
 \end{aligned}$$

Von den diversen Kopplungen, die in obigen Lagrangefunktionen enthalten sind, betrachten wir im folgenden nur jene, die für die Strahlungszersfälle des f , f' und A_2 bzw. ε , ε' und δ relevant sind. D.h. wir lassen sämtliche Terme, die Teilchen mit von Null verschiedener Strangeness enthalten, außer acht.

Substituiert man in $\mathcal{L}_{\text{int}}(F^0, V)$, $\mathcal{L}_{\text{int}}(T, V)$, $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varepsilon^0, V)$ und $\mathcal{L}_{\text{int}}(G, V)$ die unphysikalischen Felder durch die zugehörigen physikalischen Felder (s. Gl. (25) bis (28) aus § 3.1a dieses Kapitels!), so erhält man schließlich folgende on-shell-Wechselwirkungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}(F, V) = F_{\mu\nu} \{ & -G_{fqq}^{(1)} \vec{\partial}^{\mu\sigma} \vec{\partial}^\nu_\sigma + G_{fqq}^{(2)} M_q^2 \vec{\partial}^\mu \vec{\partial}^\nu \\ & - G_{f\varphi\varphi}^{(1)} \varphi^{\mu\sigma} \varphi^\nu_\sigma + G_{f\varphi\varphi}^{(2)} M_\varphi^2 \varphi^\mu \varphi^\nu \\ & - G_{f\omega\omega}^{(1)} \omega^{\mu\sigma} \omega^\nu_\sigma + G_{f\omega\omega}^{(2)} M_\omega^2 \omega^\mu \omega^\nu \\ & - G_{f\omega\varphi}^{(1)} \omega^{\mu\sigma} \varphi^\nu_\sigma + G_{f\omega\varphi}^{(2)} \omega^\mu \varphi^\nu \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(F', V) = \mathcal{L}_{\text{int}}(F \rightarrow F', V)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}(A_2, V) = \bar{A}_{2\mu\nu} \{ & -G_{A_2q\varphi}^{(1)} \vec{\partial}^{\mu\sigma} \varphi^\nu_\sigma + G_{A_2q\varphi}^{(2)} \vec{\partial}^\mu \varphi^\nu \\ & - G_{A_2q\omega}^{(1)} \vec{\partial}^{\mu\sigma} \omega^\nu_\sigma + G_{A_2q\omega}^{(2)} \vec{\partial}^\mu \omega^\nu \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}(\varepsilon, V) = \varepsilon \{ & G_{\varepsilon q\varphi}^{(1)} \vec{\partial}_{\mu\nu} \vec{\partial}^{\mu\nu} + G_{\varepsilon q\varphi}^{(2)} \vec{\partial}_\mu \vec{\partial}^\mu \\ & + G_{\varepsilon\varphi\varphi}^{(1)} \varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} + G_{\varepsilon\varphi\varphi}^{(2)} \varphi_\mu \varphi^\mu \\ & + G_{\varepsilon\omega\omega}^{(1)} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + G_{\varepsilon\omega\omega}^{(2)} \omega_\mu \omega^\mu \\ & + G_{\varepsilon\omega\varphi}^{(1)} \omega_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} + G_{\varepsilon\omega\varphi}^{(2)} \omega_\mu \varphi^\mu \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\varepsilon', V) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\varepsilon \rightarrow \varepsilon', V)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}}(\delta, V) = \vec{\delta} \{ & G_{\delta q\varphi}^{(1)} \vec{\partial}_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} + G_{\delta q\varphi}^{(2)} \vec{\partial}_\mu \varphi^\mu \\ & + G_{\delta q\omega}^{(1)} \vec{\partial}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + G_{\delta q\omega}^{(2)} \vec{\partial}_\mu \omega^\mu \} \end{aligned}$$

mit Kopplungskonstanten $G_{...}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), die im Fall des f^- , f'^- und A_2^- -Mesons gegeben sind durch

$$G_{f\eta\eta}^{(1)} = \tilde{K}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T - \frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(1)}}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{M_f} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \sin \theta_T$$

$$G_{f'\eta\eta}^{(1)} = \tilde{K}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \cos \theta_T + \frac{M_{f'}}{M_1} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \sin \theta_T \left[\frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(1)}}{\sqrt{3}} \cos^2 \theta_V - \frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(1)}}{2} \sin 2\theta_V \right]$$

$$G_{f\omega\omega}^{(1)} = \tilde{K}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T + \frac{M_f}{M_1} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \sin \theta_T \left[\frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)}}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta_V + \frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)}}{2} \sin 2\theta_V \right]$$

$$G_{f'\omega\omega}^{(1)} = - \frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)}}{\sqrt{3}} \frac{M_{f'}}{M_1} \sin \theta_T \sin 2\theta_V - \tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)} \frac{M_{f'}}{M_1} \sin \theta_T \cos 2\theta_V$$

$$G_{f\eta\eta}^{(2)} = \tilde{K}_f \frac{M_f}{M_0} \sin \theta_T + \frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(2)}}{\sqrt{3}} \frac{M_f}{M_1} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \cos \theta_T$$

$$G_{f'\eta\eta}^{(2)} = \tilde{K}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T - \frac{M_{f'}}{M_1} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \cos \theta_T \left[\frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(2)}}{\sqrt{3}} \cos^2 \theta_V - \frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(2)}}{2} \sin 2\theta_V \right]$$

$$G_{f\omega\omega}^{(2)} = \tilde{K}_f \frac{M_f}{M_0} \sin \theta_T - \frac{M_f}{M_1} (\delta_{11} + \frac{1}{M_1^2} \delta_{21}) \cos \theta_T \left[\frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(2)}}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta_V + \frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(2)}}{2} \sin 2\theta_V \right]$$

$$G_{f'\omega\omega}^{(2)} = \frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(2)}}{\sqrt{3}} \frac{M_{f'}}{M_1} \cos \theta_T \sin 2\theta_V + \tilde{g}_{T\omega\omega}^{(2)} \frac{M_{f'}}{M_1} \cos \theta_T \cos 2\theta_V$$

$$G_{A_2\eta\eta}^{(1)} = \frac{\tilde{g}_{T\eta\eta}^{(1)}}{\sqrt{3}} 2 \cos \theta_V + \tilde{g}_{T\eta\eta}^{(1)} \sin \theta_V$$

$$G_{A_2\omega\omega}^{(1)} = - \frac{\tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)}}{\sqrt{3}} 2 \sin \theta_V - \tilde{g}_{T\omega\omega}^{(1)} \cos \theta_V$$

Die entsprechenden Kopplungskonstanten für das $\bar{s}$ -, ϵ' - und ϵ -Meson lauten:

$$\begin{aligned}
 G_{\epsilon q q}^{(i)} &= -\frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon}}{m_s} \sin \theta_s + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon}}{m_0} M_q^2 \cos \theta_s \quad +) \\
 G_{\epsilon q q}^{(i)} &= \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon}}{m_g} \sin \theta_s \cos^2 \theta_v - \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon}}{m_g} \sin \theta_s \sin 2\theta_v + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon}}{m_0} M_q^2 \cos \theta_s \\
 G_{\epsilon \omega \omega}^{(i)} &= \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon}}{m_g} \sin \theta_s \sin^2 \theta_v + \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon}}{m_g} \sin \theta_s \sin 2\theta_v + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon}}{m_0} M_{\omega}^2 \cos \theta_s \\
 G_{\epsilon \omega \varphi}^{(i)} &= -\frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon}}{m_0} \sin \theta_s \sin 2\theta_v - \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon}}{m_0} \sin \theta_s \cos 2\theta_v \\
 G_{\epsilon' q q}^{(i)} &= \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} M_q^2 \sin \theta_s \\
 G_{\epsilon' \varphi \varphi}^{(i)} &= -\frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \cos^2 \theta_v + \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \sin 2\theta_v + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} M_{\varphi}^2 \sin \theta_s \\
 G_{\epsilon' \omega \omega}^{(i)} &= -\frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \sin^2 \theta_v - \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \sin 2\theta_v + \delta_{2i} \otimes \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} M_{\omega}^2 \sin \theta_s \\
 G_{\epsilon' \omega \varphi}^{(i)} &= \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \sin 2\theta_v + \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{2} \frac{m_{\epsilon'}}{m_g} \cos \theta_s \cos 2\theta_v \\
 G_{\delta q q}^{(i)} &= \frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} 2 \cos \theta_v + \tilde{g}_{svv}^{(i)} \sin \theta_v \\
 G_{\delta q \omega}^{(i)} &= -\frac{\tilde{g}_{svv}^{(i)}}{\sqrt{3}} 2 \sin \theta_v + \tilde{g}_{svv}^{(i)} \cos \theta_v
 \end{aligned}$$

Beschäftigen wir uns zunächst wieder mit den Kopplungskonstanten der Tensormesonen. Die Anzahl dieser Konstanten läßt sich erheblich reduzieren, wenn man das Quark-Modell hinzuzieht und annimmt, daß die allein

+) Die Beiträge zu $G_{\epsilon' \dots}^{(i)}$ und $G_{\epsilon' \dots}^{(i)}$, die die Substitution von $F_{\mu\nu}^g$ durch die physikalischen Felder liefert, sind auch hier vernachlässigt worden.

aus strange quarks bestehenden Systeme nicht an solche koppeln, die keine strange quarks enthalten. Setzt man dementsprechend

$$G_{f'q q}^{(1,2)} = 0$$

und

$$G_{f' \omega q}^{(1,2)} = 0$$

so folgt aus der ersten dieser beiden Relationen:

$$-\tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta_T = g_{T \nu \nu}^{(1)}$$

und

$$-\tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta_T = \frac{g_{T \nu \nu}^{(2)}}{M_q^2}$$

und damit

$$g_{T \nu \nu}^{(1)} = \frac{g_{T \nu \nu}^{(2)}}{M_q^2}$$

Die zweite dagegen impliziert:

$$-\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\theta_V \tilde{g}_{T \nu \nu}^{(1,2)} = g_{T \nu \nu}^{(1,2)},$$

so daß aufgrund der vorangehenden

$$\tilde{g}_{T \nu \nu}^{(1)} = \tilde{g}_{T \nu \nu}^{(2)} / M_q^2$$

Bei Verwendung dieser Beziehungen schreiben sich dann die oben angegebenen Kopplungskonstanten $G_{f \dots}^{(1)}$, $G_{f' \dots}^{(1)}$ und $G_{A_2 \dots}^{(1)}$ wie folgt:

$$G_{f q q}^{(1)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \cos \theta_T (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_T)$$

$$G_{f \tau \tau}^{(1)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \cos \theta_T (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_T \frac{\cos^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V})$$

$$G_{f q q}^{(2)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \cos \theta_T (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_T \frac{M_q^2}{M_p^2} \frac{\cos^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V})$$

$$G_{f \omega \omega}^{(1)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{\tilde{M}_0} \cos \theta_T (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_T \frac{\sin^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V})^{+)}$$

$$G_{f \omega p}^{(1)} = 0$$

+) Bei der Berechnung von $G_{f \omega \omega}^{(2)}$ und $G_{f' \omega \omega}^{(1)}$ haben wir der Einfachheit halber $M_\omega = M_q$ gesetzt.

sowie

$$G_{f'q\varphi}^{(1)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V} \right)$$

$$G_{f'q\varphi}^{(2)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 + \frac{M_q^2}{M_{f'}^2} \frac{\cos^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V} \right)$$

$$G_{f'\omega\omega}^{(1)} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_V}{\cos 2\theta_V} \right) +)$$

$$G_{A_1 q\varphi}^{(1)} = 2 \frac{g_{\tau\nu\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\cos^2 \theta_T}{\cos 2\theta_V} \quad G_{A_2 q\omega}^{(1)} = 2 \frac{g_{\tau\nu\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\sin^2 \theta_T}{\cos 2\theta_V}$$

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß das Verschwinden von $G_{f'\omega\varphi}^{(1)}$ unabhängig von der Wahl von θ_V ist. Legen wir für θ_V den Wert des "idealen" Mischungswinkels zugrunde:

$$\theta_V = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} = 35.2^\circ$$

so erhalten wir in Übereinstimmung mit den Vorstellungen des Quark-Modells neben $G_{f'q\varphi}^{(1,2)} = 0$ auch $G_{f'\omega\omega}^{(1,2)} = 0$.

Für die nicht-verschwindenden Kopplungskonstanten ergibt sich (mit $\theta_V = 35.2^\circ$, $\theta_T = 24.2^\circ$):

$$G_{f\varphi\varphi}^{(1)} = 4,4 \text{ GeV}^{-1} \quad G_{f\varphi\varphi}^{(2)} = 6,2 \text{ GeV}^{-1}$$

$$G_{fqq}^{(1)} = 8,8 \text{ GeV}^{-1} = G_{f\omega\omega}^{(1)}$$

$$G_{f'\varphi\varphi}^{(1)} = 12,0 \text{ GeV}^{-1} \quad G_{f'\varphi\varphi}^{(2)} = 8,4 \text{ GeV}^{-1}$$

und

$$G_{A_2 \zeta\varphi}^{(1)} = -13,6 \text{ GeV}^{-1}$$

$$G_{A_2 q\omega}^{(1)} = -4,7 \text{ GeV}^{-1}$$

Diese Werte befinden sich, soweit sie das f und f' angehen, in guter Übereinstimmung mit den von Renner¹⁰⁸ angegebenen Werten. (Um die von Renner benutzten, dimensionslosen Kopplungskonstanten mit unseren vergleichen zu können, haben wir letztere mit der Masse des jeweiligen Tensormesons zu

+) s. Fußnote auf der vorigen Seite!

multiplizieren und durch 2 zu dividieren !)

Über die numerischen Werte der oben ebenfalls angegebenen Kopplungskonstanten für das ϵ -, ϵ' - und ζ -Meson können wir keine Aussagen machen, da weder der Mischungswinkel θ_3 , noch die Oktett-Kopplungskonstanten $g_{\epsilon V}$ und $\tilde{g}_{\epsilon V}^{(1)}$ bekannt sind. Ein Vergleich mit den Voraussagen anderer Theorien ist nur im Fall des ϵ -Mesons möglich, falls man dieses mit einer bei 700 MeV gelegenen $\pi\pi$ -Resonanz der Breite $\Gamma_{\epsilon\pi\pi} = 400$ MeV identifiziert und es als reines SU(3)-Singlett betrachtet. Diese Daten sind von Kleinert ¹⁰⁷ in einer Arbeit über elektromagnetische Kopplungen des f - und ϵ (bzw. ζ)-Mesons benutzt worden. Für die durch die effektive Lagrange-funktion

$$\mathcal{L}_{\epsilon VV} = g_{\epsilon VV} \frac{M_V}{2} \epsilon V_\mu V^\mu + h_{\epsilon VV} \frac{1}{M_V} V_{\nu,\mu} V^{\mu,\nu}$$

definierten Kopplungskonstanten $g_{\epsilon VV}$ und $h_{\epsilon VV}$ erhält er

$$g_{\epsilon VV} = -2 \frac{M_V}{m_\epsilon} \gamma_\epsilon \quad (V = \rho, \omega, \varphi)$$

und

$$h_{\epsilon VV} = 0$$

wobei γ_ϵ die Kopplungsstärke des ϵ -Mesons an den EIT definiert: $|\gamma_\epsilon| = m_\epsilon |b|$. Mit den oben angegebenen Schätzwert von b ($b \approx 6$) ergibt sich dann

$$|g_{\epsilon \rho \rho}| \approx |g_{\epsilon \omega \omega}| \approx 9,5 \quad \text{und} \quad |g_{\epsilon \varphi \varphi}| \approx 12,2$$

Die Kopplungskonstanten $g_{\epsilon VV}$ und $h_{\epsilon VV}$ sind vergleichbar mit den von uns eingeführten Kopplungskonstanten $G_{\epsilon VV}^{(2)}$ und $G_{\epsilon VV}^{(1)}$ ($V = \rho, \omega, \varphi$), wenn man zu $\theta_3 = 0$ übergeht und den oben benutzten Schätzwert von b benutzt. In diesem Fall verschwinden auch bei uns die Ableitungskopplungen (d.h. $G_{\epsilon VV}^{(1)} = 0$) während die Stärke der anderen Kopplungen durch

$$G_{\epsilon VV}^{(2)} = b M_V^2 \quad (V = \rho, \omega, \varphi)$$

beschrieben wird. Berücksichtigt man den Zusammenhang

$$G_{\epsilon VV}^{(2)} = g_{\epsilon VV} \cdot \frac{M_V}{2}$$

so zeigt sich eine erstaunlich gute Übereinstimmung zwischen unseren Ergebnissen und denen von Kleinert.

3.2 c Kopplung an Baryonen

Wir gehen jetzt dazu über, die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Baryonen zu untersuchen. Das Studium dieser Kopplungen macht es erforderlich, anstelle des üblichen Tensorformalismus den in Kap. I, § 1.2 dargestellten Vierbeinformalismus zu benutzen, da wir es jetzt mit Fermionen zu tun haben. Aus Kap. I, § 3.2 wissen wir bereits, wie die allgemein kovariante und zugleich weylinvariante Lagrangefunktion eines massiven Spin 1/2-Teilchens aussieht. Sie besteht - ähnlich wie im Spin 1-Fall - aus einem kinetischen Anteil, der bereits weylinvariant ist, und aus einem Massenterm, der dadurch weylinvariant wird, daß man an ihm ein skalares Feld linear koppelt. Diese Kenntnis gestattet es uns, die an dieser Stelle interessierende weylinvariante Lagrangefunktion des durch die SU(3)-Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda^+ & \Sigma^+ & p \\ \bar{\Sigma}^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda^+ & n \\ -\bar{\Xi}^- & \bar{\Xi}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda^0 \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^+ + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^+ & \bar{\Sigma}^- & -\bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^+ + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^+ & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix}$$

beschriebenen Baryonen-Oktetts sofort hinzuschreiben. Hinsichtlich der SU(3)-Struktur dieser Lagrangefunktion ist dabei zu berücksichtigen, daß der die SU(3)-Invarianz brechende Anteil, der die Massenaufspaltung innerhalb des Oktetts beschreibt, anders als im Fall der pseudoskalaren Mesonen oder der Vektormesonen aus zwei verschiedenen zu λ_8 proportionalen Termen besteht⁸⁵. Wir schreiben:

$$\mathcal{L}^\varphi(B, e) = \mathcal{L}_{\text{inv}}^\varphi(B, e) + \mathcal{L}_{\text{br.}}^\varphi(B, e) \quad (1)$$

mit

$$\mathcal{L}_{inv}^{\pi}(B, e) = -e \operatorname{Sp} \{ \bar{B} [-i \gamma^{\alpha} e_{\alpha}^{\mu} D_{\mu} + M_B \tilde{\pi}] B \} \quad (2)$$

und

$$\mathcal{L}_{br}^{\pi}(B, e) = -e \operatorname{Sp} \{ \delta M_1 \tilde{\pi} (\bar{B} \lambda_8 B) + \delta M_2 \tilde{\pi} (\bar{B} B \lambda_8) \} \quad (3)$$

wobei D_{μ} die in Kap. II, § 1.2 definierte, kovariante Ableitung bedeutet:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + i \Gamma_{\mu}$$

mit den Fock-Ivanenko-Koeffizienten

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{2} \omega_{\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \quad *)$$

Bei der Konstruktion der Lagrangefunktion, die die Wechselwirkung des 2^+ -Mesonen-Oktetts mit dem der Baryonen beschreibt, ist zu berücksichtigen, daß auch in diesem Fall wieder zwei verschiedene Kopplungen möglich sind. Im flachen Raum haben sie die Gestalt ^{109,110}

$$\bar{B} \frac{i}{4} (\gamma_{\alpha} \vec{\partial}_{\alpha} + \gamma_4 \vec{\partial}_4) B T^{\alpha\beta} \quad (4)$$

und

$$\bar{B} \vec{\partial}_{\alpha} \vec{\partial}_{\beta} B T^{\alpha\beta} \quad (5)$$

wobei B und $T^{\alpha\beta}$ ein beliebiges Baryonen- bzw. Tensorfeld darstellt. Die allgemein kovariante Verallgemeinerung hiervon lautet

$$e \bar{B} \frac{i}{4} (\gamma_{\alpha} e_{\beta}^{\mu} \vec{D}_{\mu} + \gamma_4 e_{\alpha}^{\mu} \vec{D}_{\mu}) B T^{\alpha\beta} \quad (6)$$

und

$$e \bar{B} (e_{\alpha}^{\mu} \vec{D}_{\mu} e_{\beta}^{\nu} \vec{D}_{\nu}) B T^{\alpha\beta} \quad (7)$$

Diese Kopplungen genügen natürlich noch nicht der Forderung nach Weyl-invarianz. Um dies für die erste von beiden zu erreichen, genügt es, $T^{\alpha\beta}$ durch das Tensorfeld $\hat{T}^{\alpha\beta}$ mit dem Weylgewicht Null zu ersetzen, da die beiden Terme

*)

Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß griechische Indizes Weltindizes bedeuten, lateinische dagegen Lorentzindizes.

mit denen T^{ab} in (6) multipliziert wird, bezüglich Weyltransformationen die Struktur der Lagrangedichte eines masselosen Spin1/2-Feldes besitzen und letztere bekanntlich weylinvariant ist. Im Ausdruck (7) dagegen müssen sämtliche auftretenden Felder durch die zugehörigen Felder mit dem Weylgewicht Null ersetzt werden, wenn man erreichen will, daß auch dieser Ausdruck weylinvariant wird. Wir werden später jedoch sehen, daß die TMD in Verbindung mit dem Quark-Modell - auf das wir uns hier stützen müssen, um zu quantitativen Aussagen über die in Frage stehenden Kopplungen zu gelangen - die Kopplung (7) ausschließt, falls nur das F/D-Verhältnis für diese Kopplung nicht einen bestimmten Wert besitzt. Der Einfachheit halber ziehen wir daher diese Kopplung überhaupt nicht in Betracht.

Bei Beschränkung auf den ersten Kopplungstyp lautet dann die SU(3)-invariante Lagrangefunktion der Wechselwirkung zwischen dem Baryonen- und 2^+ -Mesonen-Oktett ¹¹¹:

$$\mathcal{L}_{int}^{\eta} (T, B) = \sqrt{2} \, g_{TBB} \, \text{Sp} \left(\alpha_T e \{ \bar{B}, D_{ab} B \} \hat{T}^{ab} + (\alpha_T - 1) e [\bar{B}, D_{ab} B] \hat{T}^{ab} \right) \quad (8)$$

mit

$$D_{ab} = \frac{i}{4} (g_a e_b^{\mu} \vec{D}_{\mu} + g_b e_a^{\mu} \vec{D}_{\mu})$$

Die entsprechende Lagrangefunktion, die die Wechselwirkung zwischen Baryonen und 0^+ -Mesonen beschreibt, lautet dagegen:

$$\mathcal{L}_{int}^{\eta} (S, B) = \sqrt{2} \, g_{sBB} \, \text{Sp} \left(\alpha_s e \{ \bar{B}, B \} S + (\alpha_s - 1) e [\bar{B}, B] S \right) \quad (9)$$

Die Weylinvarianz dieser Lagrangefunktion geht daraus hervor, daß jeder einzelne in ihr auftretende Term die Struktur eines weylinvarianten, d.h. mit einem Skalarfeld multiplizierten Massenterms eines Fermion-Feldes besitzt.

Die Entwicklung der Lagrangefunktionen (1), (8) und (9) nach $\kappa, F_{\mu\nu}^0$ und $b \varepsilon^0$ und anschließende Ausführung der Spuoperation liefert folgende tri-

linearen Wechselwirkungsterme:

$$\mathcal{L}_{int}(\bar{\Psi}, B) = \bar{\Psi}_f \tilde{\bar{\Psi}}_{\mu\nu}^0 \{ T_N^{\mu\nu} + T_\Sigma^{\mu\nu} + T_\Xi^{\mu\nu} + T_{\Lambda^0}^{\mu\nu} \}^+)$$

mit den Energie-Impuls-Tensoren

$$T_N^{\mu\nu} = \bar{N} \hat{D}^{\mu\nu} N, \quad T_\Sigma^{\mu\nu} = \bar{\Sigma} \hat{D}^{\mu\nu} \Sigma, \quad T_\Xi^{\mu\nu} = \bar{\Xi} \hat{D}^{\mu\nu} \Xi, \quad T_{\Lambda^0}^{\mu\nu} = \bar{\Lambda}^0 \hat{D}^{\mu\nu} \Lambda^0$$

wobei

$$\hat{D}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} (\gamma^\mu \tilde{\partial}^\nu + \gamma^\nu \tilde{\partial}^\mu)$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(T, B) = & \bar{T}_{\mu\nu}^0 \{ g_{T^0 NN} \bar{N} \hat{D}^{\mu\nu} N + g_{T^0 \Xi \Xi} \bar{\Xi} \hat{D}^{\mu\nu} \Xi \\ & + g_{T^0 \Sigma \Sigma} \bar{\Sigma} \hat{D}^{\mu\nu} \Sigma + g_{T^0 \Lambda \Lambda} \bar{\Lambda}^0 \hat{D}^{\mu\nu} \Lambda^0 \} \\ & \bar{A}_{2\mu\nu}^0 \{ g_{A_2 NN} \bar{N} \hat{D}^{\mu\nu} N + g_{A_2 \Xi \Xi} \bar{\Xi} \hat{D}^{\mu\nu} \Xi \\ & + g_{A_2 \Sigma \Sigma} \bar{\Sigma} \hat{D}^{\mu\nu} \Sigma + g_{A_2 \Lambda \Lambda} (\bar{\Sigma} \hat{D}^{\mu\nu} \Lambda^0 + H.c.) \} \\ & + \{ g_{K_N \Sigma N} (\bar{N} \hat{D}^{\mu\nu} \Sigma + H.c.) + g_{K_N N \Lambda} (\bar{N} \hat{D}^{\mu\nu} \Lambda^0 K_{N\mu\nu} + H.c.) \} \\ & + \{ g_{K_N \Xi \Lambda} (\bar{\Xi} \hat{D}^{\mu\nu} \Lambda^0 K_{N\mu\nu}^c + H.c.) + g_{K_N \Xi \Sigma} (\bar{\Xi} \hat{D}^{\mu\nu} \Sigma K_{N\mu\nu}^c + H.c.) \} \end{aligned}$$

Für die Kopplung der O^+ -Mesonen an Baryonen ergibt sich in analoger Weise:

$$\mathcal{L}_{int}(O^+, B) = -\theta O^+ (T_N^\Lambda + T_\Sigma^\Lambda + T_\Xi^\Lambda + T_{\Lambda^0}^\Lambda)$$

wobei T_B^Λ ($B = N, \Sigma, \Xi, \Lambda^0$) die Spur der oben angegebenen Energie-Impuls-Tensoren bedeutet:

$$T_N^\Lambda = M_N \bar{N} N, \quad T_\Sigma^\Lambda = M_\Sigma \bar{\Sigma} \Sigma, \quad T_\Xi^\Lambda = M_\Xi \bar{\Xi} \Xi, \quad T_{\Lambda^0}^\Lambda = M_{\Lambda^0} \bar{\Lambda}^0 \Lambda^0$$

+))

Wir gehen hier wieder zur üblichen Notation über und bezeichnen Lorentz-indizes mit griechischen Buchstaben.

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(S,B) = & i \{ g_{\epsilon^0 NN} \bar{N} N + g_{\epsilon^0 \Xi \Xi} \bar{\Xi} \Xi + g_{\epsilon^0 \Sigma \Sigma} \bar{\Sigma} \Sigma + g_{\epsilon^0 \Lambda \Lambda} \bar{\Lambda} \Lambda \} \\ & + \vec{d} \cdot \{ g_{\sigma NN} \bar{N} \vec{\tau} N + g_{\sigma \Xi \Xi} \bar{\Xi} \vec{\tau} \Xi + i g_{\sigma \Sigma \Sigma} \bar{\Sigma} \vec{\tau} \Sigma + g_{\sigma \Sigma \Lambda} (\bar{\Sigma} \vec{\tau} \Lambda^0 + H.c.) \} \\ & + \{ g_{\kappa \Sigma N} (\bar{N} \vec{\tau} \kappa \vec{\Sigma} + H.c.) + g_{\kappa \Lambda \Lambda} (\bar{\Lambda} \Lambda^0 \kappa + H.c.) \} \\ & + \{ g_{\kappa \Xi \Lambda} (\bar{\Xi} \vec{\tau} \kappa^c + H.c.) + g_{\kappa \Xi \Sigma} (\bar{\Xi} \vec{\tau} \kappa^c \vec{\Sigma} + H.c.) \} \end{aligned}$$

Wir haben hierbei die Isospin-Doublets

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}$$

sowie

$$K_N = \begin{pmatrix} K_N^+ \\ K_N^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_N^c = \begin{pmatrix} \bar{K}_N^0 \\ -K_N^- \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \begin{pmatrix} \kappa^+ \\ \kappa^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \kappa^c = \begin{pmatrix} \bar{\kappa}^0 \\ -\kappa^- \end{pmatrix}$$

benutzt.

Die in $\mathcal{L}_{int}(T,B)$ und $\mathcal{L}_{int}(S,B)$ auftretenden Kopplungskonstanten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{T^0 NN} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 4\alpha_T) g_{TBB} & g_{T^0 \Xi \Xi} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 2\alpha_T) g_{TBB} \\ g_{T^0 \Sigma \Sigma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_T g_{TBB} & g_{T^0 \Lambda \Lambda} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_T g_{TBB} \\ g_{A_2 NN} &= g_{TBB} & g_{A_2 \Xi \Xi} &= (1 - 2\alpha_T) g_{TBB} \\ g_{A_2 \Sigma \Sigma} &= -2(1 - \alpha_T) g_{TBB} & g_{A_2 \Sigma \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_T g_{TBB} \\ g_{K_N^+ \Lambda N} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 2\alpha_T) g_{TBB} & g_{K_N \Sigma N} &= -(1 - 2\alpha_T) g_{TBB} \\ g_{K_N^0 \Sigma \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 4\alpha_T) g_{TBB} & g_{K_N \Xi \Sigma} &= -g_{TBB} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 g_{e'NN} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 4\alpha_s) g_{sBB} & g_{e'ZZ} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 2\alpha_s) g_{sBB} \\
 g_{e'EE} &= \frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_s g_{sBB} & g_{e'AA} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_s g_{sBB} \\
 g_{e'NN} &= g_{sBB} & g_{e'ZZ} &= (1 - 2\alpha_s) g_{sBB} \\
 g_{e'EE} &= -2(1 - \alpha_s) g_{sBB} & g_{e'AA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} 2\alpha_s g_{sBB} \\
 g_{\mu'NN} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 2\alpha_s) g_{\tau BB} & g_{\mu'ZZ} &= -(1 - 2\alpha_s) g_{sBB} \\
 g_{\mu'EE} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (3 - 4\alpha_s) g_{sBB} & g_{\mu'ZZ} &= -g_{\tau BB}
 \end{aligned}$$

Um die Kopplungskonstanten der physikalischen Felder F und F' bzw. ε und ε' zu erhalten, haben wir - wie üblich - in obigen Lagrangefunktionen die Transformationsformeln (25,26) und (27,28) aus § 3.1a dieses Kapitels einzusetzen. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
 g_{fNN} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T - \frac{M_f}{M_1} \sin \theta_T \frac{3 - 4\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{fZZ} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T + \frac{M_f}{M_2} \sin \theta_T \frac{3 - 2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{fEE} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T - \frac{M_f}{M_2} \sin \theta_T \frac{2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{fAA} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T + \frac{M_f}{M_2} \sin \theta_T \frac{2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{f'NN} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T + \frac{M_{f'}}{M_1} \cos \theta_T \frac{3 - 4\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{f'ZZ} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T - \frac{M_{f'}}{M_2} \cos \theta_T \frac{3 - 2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{f'EE} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T + \frac{M_{f'}}{M_2} \cos \theta_T \frac{2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB} \\
 g_{f'AA} &= \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T - \frac{M_{f'}}{M_2} \cos \theta_T \frac{2\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{\tau BB}
 \end{aligned}$$

sowie

$$g_{\epsilon NN} = -6 M_N \frac{m_\epsilon}{m_0} \cos \theta_s - \frac{m_\epsilon}{m_\theta} \sin \theta_s \frac{3-4\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta} \quad +)$$

$$g_{\epsilon \Xi \Xi} = -6 M_\Xi \frac{m_\epsilon}{m_0} \cos \theta_s + \frac{m_\epsilon}{m_\theta} \sin \theta_s \frac{3-2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon \Sigma \Sigma} = -6 M_\Sigma \frac{m_\epsilon}{m_0} \cos \theta_s - \frac{m_\epsilon}{m_\theta} \sin \theta_s \frac{2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon \Lambda \Lambda} = -6 M_\Lambda \frac{m_\epsilon}{m_0} \cos \theta_s + \frac{m_\epsilon}{m_\theta} \sin \theta_s \frac{2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon' NN} = -6 M_N \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} \sin \theta_s + \frac{m_{\epsilon'}}{m_\theta} \cos \theta_s \frac{3-4\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon' \Xi \Xi} = -6 M_\Xi \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} \sin \theta_s - \frac{m_{\epsilon'}}{m_\theta} \cos \theta_s \frac{3-2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon' \Sigma \Sigma} = -6 M_\Sigma \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} \sin \theta_s - \frac{m_{\epsilon'}}{m_\theta} \cos \theta_s \frac{2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

$$g_{\epsilon' \Lambda \Lambda} = -6 M_\Lambda \frac{m_{\epsilon'}}{m_0} \sin \theta_s - \frac{m_{\epsilon'}}{m_\theta} \cos \theta_s \frac{2\alpha_s}{\sqrt{3}} g_{s\theta\theta}$$

Um quantitative Aussagen über diese experimentell nicht direkt zugänglichen Kopplungskonstanten machen zu können, ziehen wir wieder das Quarkmodell zu Hilfe.

Was die Tensormesonen angeht, so sollte nach dem Quarkmodell die Kopplung des f' -Mesons an Nukleonen verschwinden, d.h. es sollte gelten:

$$g_{f' NN} = \tilde{g}_f \frac{M_f}{M_0} \sin \theta_T + \frac{M_f}{M_\theta} \cos \theta_T \frac{3-4\alpha_T}{\sqrt{3}} g_{T\theta\theta} = 0 \quad (10)$$

Gäbe es noch eine weitere Kopplung vom Typ (7) bzw. (5), so hätte man bei Annahme des Quarkmodells noch die Beziehung

$$\tilde{g}_{f' NN} = \frac{M_f}{M_\theta} \cos \theta_T \frac{3-4\tilde{\alpha}_T}{\sqrt{3}} \tilde{g}_{T\theta\theta} = 0 \quad (11)$$

†) Der von der Substitution von $F_{\mu\nu}^0$ durch den Ausdruck (23) aus § 3.1a dieses Kapitels herrührende Beitrag zu den ϵ - und ϵ' -Kopplungskonstanten wurde auch hier wieder vernachlässigt.

wobei $\tilde{g}_{TBB}$ die zu g_{TBB} analoge Oktett-Kopplungskonstante ist und $\tilde{\alpha}_T$ dem Mischungsparameter α_T entspricht. Die Beziehung (11) ist offenbar dann erfüllt, wenn entweder $\tilde{\alpha}_T = 3/4$ ist oder $\tilde{g}_{TBB} = 0$. In beiden Fällen verschwindet auch die Kopplungskonstante

$$\tilde{g}_{fNN} = - \frac{M_f}{M_0} \sin \theta_T \frac{3-4\tilde{\alpha}_T}{\sqrt{3}} \tilde{g}_{TBB}$$

Der Einfachheit halber wollen wir hier annehmen, es sei $\tilde{\alpha}_T \neq 3/4$, so daß aufgrund von Gl.(11)

$$\tilde{g}_{TBB} = 0$$

sein muß. Dies bedeutet natürlich, daß auch für das A_2 und K_N die Kopplung (7) bzw. (5) nicht auftritt. Diese auf dem Verschwinden von $\tilde{g}_{TBB}$ beruhende Annahme ist zwar nicht frei von Willkür, widerspricht aber nicht der experimentellen Erfahrung, die ohnehin nur sehr indirekt über die in Frage stehenden Kopplungskonstanten Aufschluß liefern kann. Wir kommen auf diesen Punkt später noch einmal zurück.

Um Information über die von Null verschiedene Oktett-Kopplungskonstante g_{TBB} zu erhalten, benutzen wir Gl.(10), wobei wir natürlich den Wert des Mischungsparameters α_T kennen müssen. Nach einer auf Reggepol-Fits beruhenden Analyse von Barger et al.¹¹¹ sollte α_T bei -1 liegen. Dieser Wert deckt sich ausgezeichnet mit dem, den Ram Mohan et al.¹¹² kürzlich in einer Arbeit angaben, in welcher sie die Rolle des Pomerons innerhalb der TMD-Theorie untersuchten. Mit $\alpha_T = -1$ ist also der Ausdruck $3 - 4\alpha_T \neq 0$, und Gl.(10) liefert

$$g_{TBB} = - \frac{M_0}{M_f} \frac{\sqrt{3}}{3-4\alpha_T} \tan \theta_T \tilde{\omega}_f \quad (12)$$

D.h. bei Annahme des Quarkmodells lassen sich - ähnlich wie in den zuvor behandelten Fällen - sämtliche Kopplungskonstanten allein durch die bekannten Größen $\tilde{\omega}_f$ und θ_T sowie den Mischungsparameter α_T ausdrücken. Im einzelnen ergibt sich:

$$g_{fNN} = \tilde{\omega}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T (1 + \tan^2 \theta_T)$$

$$g_{f\pi\pi} = \tilde{\omega}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T \left(1 - \frac{3-2\alpha_T}{3-4\alpha_T} \tan^2 \theta_T\right)$$

$$g_{f\pi K} = \tilde{\omega}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T \left(1 + \frac{2\alpha_T}{3-4\alpha_T} \tan^2 \theta_T\right)$$

$$g_{f\Lambda\Lambda} = \tilde{\omega}_f \frac{M_f}{M_0} \cos \theta_T \left(1 - \frac{2\alpha_T}{3-4\alpha_T} \tan^2 \theta_T\right)$$

und

$$g_{f'\Xi\Xi} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 + \frac{3-2\alpha_T}{3-4\alpha_T}\right)$$

$$g_{f'\Xi\Lambda} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 - \frac{2\alpha_T}{3-4\alpha_T}\right)$$

$$g_{f'\Lambda\Lambda} = \tilde{\kappa}_f \frac{M_{f'}}{M_0} \sin \theta_T \left(1 + \frac{2\alpha_T}{3-4\alpha_T}\right)$$

Für die Kopplungskonstante g_{fNN} , die von α_T unabhängig ist, ergibt sich hieraus:

$$g_{fNN} = 8,4 \text{ GeV}^{-1}$$

so daß die dimensionslose Kopplungskonstante

$$G_{fNN} \equiv g_{fNN} \cdot M_N$$

den Wert

$$G_{fNN} = 7,9 \quad (13)$$

annimmt. Dieser stimmt gut überein mit den von Renner¹¹³ und Raman¹⁰⁰ gefundenen Werten, die sie unter Zugrundelegung der TMD aus einem Polansatz für die im Matricelement $\langle p | T_{\mu\nu} | p \rangle$ auftretenden Masseformfaktoren gewannen.

In die übrigen f - und f' -Kopplungskonstanten geht auch der Mischungsparameter α_T ein. Setzt man nach Barger et al.¹¹¹ $\alpha_T = -1$, so folgt:

$$\begin{array}{lll} g_{f\Xi\Xi} = 6,0 \text{ GeV}^{-1} & g_{f\Sigma\Sigma} = 6,6 \text{ GeV}^{-1} & g_{f\Lambda\Lambda} = 7,4 \text{ GeV}^{-1} \\ g_{f'\Xi\Xi} = 6,4 \text{ GeV}^{-1} & g_{f'\Sigma\Sigma} = 4,8 \text{ GeV}^{-1} & g_{f'\Lambda\Lambda} = 2,7 \text{ GeV}^{-1} \end{array}$$

Zur Bestimmung der Kopplungskonstanten des A_2 - und K_N -Mesons benötigt man neben α_T noch die Oktett-Kopplungskonstante g_{TBB} . Mit $\alpha_T = -1$ erhält man für diese nach Gl.(12):

$$g_{TBB} = -1,0$$

Dies führt auf

$$g_{A_2 NN} = -1,0 \text{ GeV}^{-1}, g_{A_2 \Xi\Xi} = -3,0 \text{ GeV}^{-1}, g_{A_2 \Sigma\Sigma} = 4,0 \text{ GeV}^{-1}, g_{A_2 \Xi\Lambda} = 1,2 \text{ GeV}^{-1}$$

und

$$g_{K_N \Lambda N} = 2,9 \text{ GeV}^{-1}, g_{K_N \Sigma N} = 3,0 \text{ GeV}^{-1}, g_{K_N \Xi\Lambda} = -4,0 \text{ GeV}^{-1}, g_{K_N \Xi\Sigma} = 1,0 \text{ GeV}^{-1}$$

Hieraus folgt insbesondere:

$$G_{A_2 NN} = g_{A_2 NN} \cdot M_N = -0,9 \quad (14)$$

Die für G_{fNN} und $G_{A_2 NN}$ angegebenen Werte (Gl.(13) bzw. (14)) weichen erheblich von jenen ab, die man aus dispersionstheoretischen Analysen^{114-118,109} der πN -Streuung gewinnt. In diesen Analysen wird neben der von uns allein betrachteten Kopplung (4) auch die Kopplung (5) berücksichtigt. Für G_{fNN} erhält man auf diese Weise einen Wert, der etwa dreimal so hoch ist wie der, den die TMD-Hypothese liefert, während die der Kopplung (5) entsprechende Kopplungskonstante $\tilde{G}_{fNN}$ zwar nicht identisch verschwindet, aber einen mit Null verträglichen Wert hat. Anders verhält es sich im Fall der Kopplung des A_2 -Mesons an Nukleonen. Kleinert¹⁰⁹ erhält aus einer Kombination von Dispersionsrelationen für die Vorwärt- und Rückwärtsstreuamplitude der Pion-Photon-Produktion für $G_{A_2 NN}$ einen ca. sechsmal höheren Wert als wir und darüberhinaus die Beziehung $G_{A_2 NN} = -\tilde{G}_{A_2 NN}$. Zwar stimmt dieses Ergebnis überein mit dem, das Baacke et al.¹¹⁰ aus einer dispersionstheoretischen Analyse der Compton-Streuung an Nukleonen erhielten, jedoch sind die experimentellen Fehler in beiden Fällen schwer abzuschätzen und somit die gewonnenen Ergebnisse - ebenso wie die für die f-Nukleon-Kopplungskonstante - nicht unbedingt schlüssig.

Für die übrigen Kopplungskonstanten $g_{A_2 \Xi\Xi} \dots, g_{K_N \Lambda N} \dots$ etc. liegen nach unserer Kenntnis bisher weder experimentelle Analysen, noch irgendwelche theoretischen Abschätzungen vor, mit denen sich unsere vergleichen ließen.

Wir besprechen jetzt noch kurz die analogen Kopplungskonstanten für das ϵ -, ϵ' -, δ - und κ -Meson. In diejenigen für das ϵ - und ϵ' -Meson geht wieder der unbekannte Mischungswinkel θ_S ein, so daß wir über diese Kopp-

lungskonstanten keine präzisen Angaben machen können. Um jedoch wenigstens wieder einen Vergleich mit anderen Voraussagen machen zu können, betrachten wir auch hier den Spezialfall $\theta_S = 0$, so daß

$$|g_{\epsilon BB}| = |b| M_B \quad (B = N, \Xi, \Sigma, \Lambda)$$

wird. Mit dem in § 3.2 a dieses Kapitels angegebenen Wert für b ($b \approx 6$) bei $m_\epsilon = 0,7$ GeV, erhalten wir dann insbesondere:

$$|g_{\epsilon NN}| \approx 5,6$$

Dieser Wert paßt sich gut an den von Ellis⁹⁶ angegebenen Wert an, liegt jedoch weit unterhalb jenes Wertes, den das σ -Modell⁹⁸ oder Abschätzungen aus der π N-Rückwärtsstreuung liefern ($10 \leq |g_{\epsilon NN}| \leq 15$).

Die Kopplungskonstanten $g_{\epsilon NN}$, $g_{\epsilon \Xi \Xi}$ etc. werden allein durch die Oktett-Kopplungskonstante $g_{\epsilon BB}$ und den Mischungsparameter α_S bestimmt. Für α_S ist von Carruthers⁹¹ eine Abschätzung durchgeführt worden, die auf einem Poldominanz-Ansatz für das Matrixelement der Spur des EIT zwischen 1-Baryonen-Zuständen basierte und $\alpha_S = -0,25$ ergab. Dieser Wert befindet sich jedoch in krassem Widerspruch zu einer von Nagels et al.⁹² ebenfalls durchgeführten Abschätzung des F/D-Verhältnisses der O^+ -Mesonen. Sie beruhte auf einer kombinierten Analyse der niederenergetischen Nukleon-Nukleon- und Nukleon-Hyperon-Streuung und führte auf $\alpha_S \approx 0,64$ (bzw. $F/(F+D) \approx 0,57$). Nagels et al. geben auch einen numerischen Wert für die Oktett-Kopplungskonstante $g_{\epsilon BB} = g_{\epsilon NN}$ an, und zwar erhalten sie $g_{\epsilon BB} = 4,0$. Diese Angaben reichen im Prinzip für die Bestimmung der uns interessierenden Kopplungskonstanten aus. Da jedoch - wie oben geschildert - die experimentelle Situation hinsichtlich der O^+ -Mesonen auch heute noch zu undurchsichtig ist, um die Angaben von Nagels et al. als verläßlich ansehen zu können, ziehen wir es vor, die Diskussion über die Kopplung der O^+ -Mesonen an Baryonen hiermit abzuschließen.

ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN

Wir haben in dieser Arbeit die bereits von Raman aufgeworfene Frage nach der Möglichkeit einer lorentzinvarianten Lagrangetheorie, die neben der TMD auch die SMD realisiert, erneut aufgegriffen und positiv beantworten können. Die erstrebte Relation zwischen der Spur des EIT und dem Feld eines isoskalaren 0^+ -Teilchens, durch welche sich die SMD ausdrückt, betrachteten wir zunächst unter dem Blickwinkel einer Quelle-Feld-Identität und nicht unter dem der gebrochenen Skaleninvarianz. Daher stützen wir uns bei der Erweiterung der Ramanschen Theorie nicht auf die übliche (lineare) Gravitationstheorie, sondern auch diejenige mit Skalar-Tensor-Mischung, in welcher die Spur des EIT als Quelle des skalaren Gravitationsfeldes fungiert. Es zeigte sich jedoch, daß das skalare Gravitationsfeld und dessen Wechselwirkung mit der Materie bei der Fixierung der Quelle-Feld-Identitäten

$$T_{\mu\nu} = \lambda_f (F_{\mu\nu}^0 - \eta_{\mu\nu} F_i^{\alpha\lambda}) \quad (1)$$

und

$$T_\lambda^\lambda = \lambda_\epsilon \epsilon^0 \quad (2)$$

überhaupt keine Rolle spielt. Die Ableitungskopplung zwischen $F_{\mu\nu}^0$ und ϵ^0 welche die für die Konsistenz von (1) und (2) notwendige Proportionalität zwischen $F_\lambda^{\alpha\lambda}$ und ϵ^0 zur Folge hat, konnte durch eine einfache Feldtransformation eliminiert werden. Diese Feldtransformation bringt dann die Quelle-Feld-Identität (1) auf eine Form, die mit der in der Einleitung zitierten Quelle-Feld-Identität (2) identisch ist. Ausschlaggebend für die erweiterte Ramansche Theorie war die Forderung, daß das Spin-0-Feld ϵ , an die Spur desselben Tensorstromes $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ koppelt, an den auch das Tensorfeld $F_{\mu\nu}^0$ koppelt. Die Struktur dieses Tensorstroms blieb - ebenso wie in der Theorie von Raman - weiterhin offen. Allerdings setzten wir von Anfang an voraus, daß er weder von $F_{\mu\nu}^0$ noch von ϵ^0 abhängt, d.h. daß weder das Feld $F_{\mu\nu}^0$, noch das Feld ϵ^0 mit sich selbst wechselwirken.

Um die SMD auch in die von Salam et al. vorgeschlagene, allgemein kovariante Lagrangetheorie der TMD einzubauen, führten wir in die dort auftretende hadronische Lagrangefunktion ein massives Goldstone-Feld ein, das als Eichfeld der Weyltransformation der hadronischen Felder benutzt wurde. Die Forderung der Weylinvarianz implizierte die Kopplung dieses Goldstone-Feldes an die Spur des EIT der Hadronen, und es zeigte sich, daß die entstehende Theorie in ihrer linearisierten Version identisch ist mit der zuvor um die Einbeziehung der SMD erweiterten Lagrangetheorie von Raman.

Anschließend untersuchten wir die Theorie in Hinblick auf ihre Konsequenzen für die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Baryonen. Hierzu mußte zunächst das Problem der Mischung der beiden isoskalaren 2^+ - und 0^+ -Mesonen gelöst werden. Dies gelang dadurch, daß wir die isoskalare Komponente des 2^+ -bzw. 0^+ -Mesonen-Oktetts als Teil der hadronischen Lagrangefunktion betrachteten und nicht etwa - wie Arnowitt et al. - der f-Metrik noch eine f'-Metrik und dem einen, bereits eingeführten Goldstone-Feld noch ein zweites zur Seite stellten. Dieses Vorgehen erlaubte es dann, im Rahmen einer allgemein kovarianten und weylinvarianten Lagrangetheorie der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz die Kopplung des gesamten 2^+ - und 0^+ -Mesonen-Nonetts an die oben genannten Hadronen zu untersuchen. Natürlich reduzieren sich die Voraussagen für die nicht-isoskalaren 2^+ - und 0^+ -Mesonen auf reine SU(3)-Voraussagen, doch hielten wir es aus Gründen der Vollständigkeit für sinnvoll, diese Mesonen in unsere Betrachtungen mit einzubeziehen.

Da die Parameter der meisten 0^+ -Mesonen äußerst ungenau bestimmt sind, verzichteten wir darauf, quantitative Angaben über deren diverse Kopplungen zu machen. Im Fall der 2^+ -Mesonen dagegen, deren Massen und Partialbreiten relativ genau gemessen sind, konnten quantitative Voraussagen gemacht werden, die sich mit denen anderer Autoren ausgezeichnet decken und auch mit dem Experiment gut übereinstimmen (soweit sie mit diesem direkt vergleichbar sind).

So zeigt sich u.a., daß die vorliegende Lagrangetheorie, die anstelle des üblichen "mass-mixing"-Modells das "current-mixing"-Modell benutzte, für die Kopplung des f - und f' -Mesons an pseudoskalare Mesonen nahezu die gleichen Ergebnisse liefert wie dispersionstheoretische Ansätze zur TMD oder reine $SU(3)$ -Analysen, die aber vom "mass-mixing"-Modell ausgehen. Für die Kopplung an Vektormesonen und Baryonen gilt eine ähnliche Feststellung, d.h. die Ergebnisse, die wir unter Zuhilfenahme des Quarkmodells gewannen, stimmen gut überein mit denen, die Renner und Raman bereits aus einem Poldominanz-Ansatz für die Masseformfaktoren der Vektormesonen bzw. Baryonen erhalten hatten, jedoch unter Zugrundelegung des "mass-mixing"-Modells für das f - f' -System. Für die Kopplung der 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Vektormesonen und Baryonen fällt natürlich ein schlüssiger Vergleich zwischen Theorie und Experiment sehr viel schwieriger aus, da sich dieser nur indirekt vollziehen läßt, nämlich über Strahlungszerfälle der 2^+ - und 0^+ -Mesonen bzw. über eine sehr genaue Analyse der Baryon-Baryon- oder Baryon-Meson-Streuung. Letzterer wird es auch vorbehalten sein, die Diskrepanz zu klären, die zwischen dispersionstheoretischen Abschätzungen der Kopplung von 2^+ -Mesonen an Nukleonen und entsprechenden Aussagen der TMD-Hypothese bestehen.

Ich danke Herrn Professor Wess und Herrn Professor Penzlin für ihr Interesse am Entstehen dieser Arbeit und die kritische Durchsicht des Manuskripts.

A N H A N G

Wir wollen an dieser Stelle noch einen kurzen Überblick darüber geben, wie sich die Idee der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz von ihren ersten Ansätzen bis hin zu ihrer feldtheoretischen Formulierung entwickelt hat.

Wie aus dem Vorhergehenden bereits deutlich geworden ist, befindet sich die Hypothese der Tensor- und Skalarmesonen-Dominanz zwar in enger Analogie zu der Vektormesonen-Dominanz (VMD) des elektromagnetischen Stromes der Hadronen, jedoch waren die Anlässe, die zur Aufstellung beider Hypothesen geführt haben, sehr verschiedener Natur. Den Anstoß zur VMD-Hypothese lieferten zwei Feststellungen, deren Zusammenhang man erst später erkannte. Die eine war die, daß sich die elektromagnetischen Formfaktoren von Pionen und Nukleonen bei kleinen Impulsüberträgen gut durch Polterme in den Massequadraten neutraler Vektormesonen beschreiben lassen und daß dies auf eine universelle Kopplung dieser Mesonen an Pionen bzw. Nukleonen hinausläuft². Die andere war die von Yang & Mills³⁸ gemachte Feststellung, daß man neutrale Vektorfelder benötigte, um die Isospin-symmetrie der Hadronen als ortabhängige Eichsymmetrie in die Theorie einführen zu können - ein Prinzip, das sich für die weitere Entwicklung der Elementarteilchen-Physik als äußerst fruchtbar herausstellte. Das Verdienst der Idee der VMD war es dann, beide Feststellungen auf einen Nenner zu bringen und die Vorstellung von Universalität der Vektorkopplung und erhaltenen Vektorströmen miteinander zu verbinden. Die feldtheoretische Formulierung dieser Hypothese wurde das erste Mal von Krollowski¹¹⁹ gegeben und findet ihren Niederschlag in der sog. Quelle-Feld-Identität

$$\mathcal{F}_\mu^e = \lambda_q \mathcal{Q}_\mu^0 + \lambda_\omega \omega_\mu + \lambda_\varphi \varphi_\mu \quad (1)$$

nach welcher der elektromagnetische Stromoperator der Hadronen in guter Näherung identisch ist mit einer Linearkombination der renormierten Feldoperatoren der neutralen Vektormesonen $\mathcal{Q}^0, \omega$ und φ . Kroll, Lee und Zumino (KLZ)³ gelang es schließlich, diese Quelle-Feld-Identität aus einer Lagrangetheorie abzuleiten und somit auf eine feldtheoretisch fundierte Basis zu stellen.

Die Anlässe, die zur Aufstellung der Hypothese der TMD und SMD geführt haben, waren im Vergleich zur VMD sehr viel weniger konkret. Einer der wichtigsten Gründe hierfür ist der, daß die Gravitationswechselwirkung zwischen Elementarteilchen um fast 40 Zehnerpotenzen schwächer ist als die elektromagnetische Wechselwirkung, so daß die experimentelle Bestimmung der Masseformfaktoren im Gegensatz zu den elektromagnetischen Formfaktoren praktisch ausgeschlossen ist. Doch wie die VMD die Universalität der Kopplung von neutralen Vektormesonon an Hadronen bedeutet, so implizieren auch TMD und SMD die universelle Kopplung der isoskalaren 2^+ - und 0^+ -Mesonen an Hadronen, und diese experimentell überprüfbare Konsequenz ist - zumindest für die Entwicklung der TMD-Hypothese - der entscheidende Gesichtspunkt gewesen. Der erste Anstoß zu dieser Hypothese kam von der Reggetheorie, als man mit ihrer Hilfe das asymptotische Verhalten des totalen Pion-Nukleon-Wirkungsquerschnitts zu erklären versuchte und in diesem Zusammenhang Chew u.a.^{120,121} die Pomeranchuk-Trajektorie mit den Quantenzahlen des Vakuums einführten. Kurz nachdem dann Lovelace¹²² die Existenz einer auf dieser Trajektorie liegenden, isoskalaren Resonanz mit dem Spin 2 postuliert hatte, führte Freund¹²³ das erste Mal den Begriff der TMD ein, und zwar unter dem Aspekt der universellen Kopplung der Pomeranchuk-Trajektorie an Hadronen, um damit das Hochenergie-Verhältnis der totalen Wirkungsquerschnitte für die Meson-Baryon-, Meson-Meson- und Baryon-Baryon-Streuung zu berechnen. Diese Idee wurde dann kurze Zeit später von Sharp und Wagner¹²⁴ wieder aufgenommen, um das Verzweigungsverhältnis $\Gamma_{T \rightarrow \pi^+\pi^-} / \Gamma_{T \rightarrow \kappa^+\kappa^-}$ der bis dahin noch nicht nachgewiesenen, aber bereits mehrfach postulierten Spin-2-Resonanz T abzuschätzen. Diese Resonanz wurde schließlich von Selove¹²⁵ und Veillet¹²⁶ als $\pi\pi$ -Resonanz mit der Masse 1250 MeV identifiziert und ist seitdem unter dem Namen f-Resonanz bekannt. Ihre Partialbreiten wurden in der Folgezeit ebenfalls gut gemessen, doch das Interesse an der TMD begann erst in dem Moment wieder zu erwachen, als schließlich ein ganzes SU(3)-Nonett von 2^+ -Mesonen etabliert war^{81-84,127}.

Man versuchte jetzt, die Hypothese der TMD mit Aussagen der SU(3)-Symmetrie in Verbindung zu bringen. So benutzten Patil und Yao¹²⁸ die TMD,

um über das "mass-mixing"-Modell³ die Zerfallsraten des f- und f'-Mesons in pseudoskalare Mesonen zu berechnen, und Salam et al.¹²⁹ machten den Vorschlag, den hadronischen EIT als Singlett-Komponente eines ganzen Nonetts von Tensor-Strömen $T_{\mu\nu}^i$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) aufzufassen und diese an die entsprechenden Komponenten des 2^+ -Mesonen-Nonetts zu koppeln, das f^0 -Feld also an den eigentlichen Energie-Impuls-Tensor. Krolewski¹³⁰ modifizierte den Vorschlag von Salam dahingehend, daß er eine Strom-Feld-Identität postulierte, die den EIT mit dem Feld des f-Mesons und dem eines hypothetischen, isoskalaren 0^+ -Mesons, des sog. ϕ -Mesons, verknüpft.

Sie hat die Gestalt

$$T_{\mu\nu} = a_f \varphi_{\mu\nu} + \frac{a_\phi}{m_\phi^2} (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \varphi \quad (2)$$

wobei $\varphi_{\mu\nu}$ und φ die Felder des f- und ϕ -Mesons bedeuten und a_f und a_ϕ irgendwelche Konstanten sind. Das Spin2-Feld $\varphi_{\mu\nu}$, das den Nebenbedingungen

$$\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^\lambda{}_\lambda = 0 \quad (3)$$

genügt, ist hiernach identisch mit dem (divergenzfreien und spurlosen) Spin2-Anteil von $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = a_f \varphi_{\mu\nu} \quad (4)$$

die Spur von $T_{\mu\nu}$ dagegen mit dem Feld des ϕ -Mesons:

$$T^\lambda{}_\lambda = a_\phi \varphi \quad (5)$$

Die von Krolewski postulierte Quelle-Feld-Identität (2) ist offensichtlich das Analogon der Quelle-Feld-Identität (1), durch die sich die VMD ausdrückt. Sie trägt der Tatsache Rechnung, daß der EIT in einen irreduziblen Spin2- und Spin0-Anteil zerfällt, wodurch TMD und SMD auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.

Dagegen wurde bis zur Aufstellung der Relation(2) die SMD stets getrennt von der TMD betrachtet. Es war Gell-Mann¹³¹, der diese Hypothese 1962 das erste Mal in Erwägung zog und daran erinnerte, daß man eine Relation vom Goldberger-Treimann-Typ erhielte, falls sich die Matrixelemente der Spur des EIT, $T^\lambda{}_\lambda$, durch stark konvergente Dispersionsintegrale beschreiben ließen. Da nämlich der Erwartungswert von $T^\lambda{}_\lambda$ bzgl. der

Zustände von Teilchen im Ruhesystem deren Masse angibt, kann man diese in Beziehung setzen zu den Kopplungskonstanten der isoskalaren Spin0-Resonanzen, von denen das Dispersionsintegral bei kleinen Impulsüberträgen möglicherweise dominiert wird. Diese Idee - so attraktiv sie auch sein mochte - war jedoch damals von recht akademischem Interesse, da es noch keinerlei Hinweise auf die Existenz der genannten Resonanzen gab.

Einen interessanten theoretischen Beitrag zum Problem der SMD lieferten Freund und Nambu¹³², die ein Lagrangemodell der SMD entwickelten, in dem ein isoskalares Spin0-Feld an seinen eigenen EIT koppelt. Dieses Modell unterscheidet sich jedoch prinzipiell von dem, das KLZ für die VMD konstruiert hatten; denn die genannte Kopplung bringt es mit sich, daß die zugehörige Lagrangefunktion nicht-polynomial wird. Einen Versuch, aus den Hypothesen der TMD und SMD gleichzeitig experimentelle Schlüsse zu ziehen, unternahm West¹³³ im Jahre 1969. Ähnlich wie zuvor schon Joshi und Pande¹³⁴ griff er die oben erläuterte Idee von Salam et al. auf, indem er ebenfalls ein ganzes Nonett von Tensorströmen $T_{\mu\nu}^i$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) postulierte, die von den Komponenten der 2^+ - und 0^+ -Mesonen-Nonetts dominiert werden. Die für die Tensorströme gültigen Spektralfunktions-Summenregeln saturierte er mit den 2^+ - und 0^+ -Mesonen und konnte auf diese Weise Massenformeln herleiten, die die Massen der 2^+ - und 0^+ -Nonetts zueinander in Beziehung setzen. Diese Formeln lassen sich jedoch auch heute noch nicht experimentell überprüfen, da die Massen der meisten 0^+ -Resonanzen zu ungenau bestimmt sind.

Die phänomenologische Anwendung der SMD erreichte ihren - wohl vorläufigen - Höhepunkt, als sich um 1970 das Interesse an der konformen Gruppe wieder belebte und man Niederenergie-Aspekte der gebrochenen Skalenvarianz zu studieren begann. Der EIT bzw. seine Spur gewann nämlich in diesem Zusammenhang eine ganz besondere Bedeutung. Denn es zeigte sich, daß in renormierbaren Theorien die Operatoren der Dilatation und speziellen konformen Transformationen in einfacher Weise durch Momente des EIT ausdrückbar sind, und daß die Verletzung der Skalen- und Konforminvarianz direkt verknüpft ist mit der Spur des EIT, und zwar über die Relationen $\partial^\mu D_\mu = T^\lambda_\lambda$ und $\partial^\mu K_{\mu\nu} = 2 \times_\nu T^\lambda_\lambda$, wo D_μ den Dilatations-

strom bedeutet und $K_{\mu\nu}$ den konformen Strom. Die Literatur über dieses Gebiet ist inzwischen so umfangreich, daß wir uns darauf beschränken, auf einige Review-Artikel^{22,57,58,135} zu verweisen, während wir die im Zusammenhng mit der SMD wichtigsten Arbeiten gesondert zitieren^{91,95-99,103,104,136,137}. In vielen dieser Arbeiten wird das Problem der Kopplung der O^+ -Mesonen an pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen oder Baryonen behandelt. Es sei jedoch betont, daß kaum eine der quantitativen Angaben, die dort gemacht werden, einen schlüssigen Vergleich mit dem Experiment zuläßt, da über die Parameter der meisten O^+ -Resonanzen auch heute nur vage Vermutungen bestehen. Diese Tatsache, die ja auch eine experimentelle Überprüfung der von West aufgestellten Messenformeln verhindert, haben wir in Kap. III, § 3.1b durch einen Überblick über den gegenwärtigen experimentellen Stand der O^+ -Mesonen zu verdeutlichen versucht. Neben den zahllosen Versuchen, mit Hilfe von Überlegungen zur Skalen- bzw. Konforminvarianz zu Aussagen über die Kopplung der O^+ -Mesonen zu gelangen, hat es auch manche Ansätze gegeben, die SMD aus einem Lagrangeprinzip in Form einer Strom-Feld-Identität herzuleiten. In diesem Zusammenhang spielt die oben zitierte Theorie von Freund und Nambu eine ganz besondere Rolle. Wie Zumino⁷ gezeigt hat, impliziert sie nämlich eine Relation vom Typ (5), wenn man unter T^A_λ die Spur des von Callan et al.^{24,23} eingeführten, "verbesserten" EIT versteht. Diese Identität ist nichts anderes als Ausdruck der gebrochenen Skalinvarianz der Theorie. Das Modell von Freund und Nambu wurde später von Chang und Freund¹⁴⁰ erweitert auf ein Nonett von Dilatationsströmen D^i_μ ($i = 0, 1, \dots, 8$), so daß man insgesamt neun Identitäten zwischen den einzelnen Komponenten des O^+ -Meson-Nonetts und den Divergenzen $T^A_{\lambda i} = \partial^\mu D^i_\mu$ erhält.

Zur gleichen Zeit, als man sich im Zusammenhng mit der konformen Gruppe über die physikalische Bedeutung der Spur des EIT klar wurde, wandte man sich auch dem EIT selbst wieder zu. So entstanden die von Raman⁴⁻⁵ entwickelte lorentzinvariante Lagrangetheorie der TMD, deren allgemein kovariante Version von ISS⁶ bzw WZ⁷ und die darauf aufbauenden Arbeiten⁸⁻¹⁸ über die wir in Kap. II, § 4 ausführlich berichtet haben. Nach diesen

feldtheoretischen Arbeiten erschienen zahlreiche phänomenologisch ausgerichtete Arbeiten^{108,112,113,141-149}, die die Aussagen der TMD einem experimentellen Test unterziehen. Untersucht werden vor allem die Kopplung des f - und f' -Mesons an pseudoskalare Mesonen, Vektormesonen und Baryonen- und zwar unter Zugrundelegung von Dispersionsrelationen für die Massefomfaktoren dieser Teilchen. Die Voraussagen für deren Kopplung an pseudoskalare Mesonen stimmen mit dem Experiment, d.h. den gemessenen Partialbreiten des f - und f' -Mesons gut überein. Die übrigen Ergebnisse lassen sich zur Zeit noch nicht in schlüssiger Weise mit dem Experiment vergleichen. Auf die im Fall der f -Nukleon-Nukleon auftretenden Diskrepanzen mit dispersionstheoretischen Analysen der Pion-Nukleon-Streuung^{109,114-118} haben wir oben bereits hingewiesen.

Im Zusammenhang mit der Kopplung der isoskalaren Tensormesonen an Hadronen trat natürlich die Frage auf, ob sich die f - f' -Mischung auch im Rahmen der allgemein kovarianten Lagrangetheorie von ISS⁶ bzw. WZ⁷ beschreiben ließe. Diese Frage war u.a. Gegenstand der in der Einleitung zitierten Arbeiten von Arnowitt et al.¹⁹ und Wess²¹, in denen neben der TMD auch die SMD realisiert wurde - und zwar in Form der von Krolikowski¹³⁰ postulierten Quelle-Feld-Identität (2). Die Frage der Einbeziehung der SU(3) in die f - g -Theorie wurde später noch einmal von Salam und Mitarbeitern^{41,150-153} unter dem Aspekt der Eichsymmetrie aufgegriffen. Und zwar machten sie davon Gebrauch, daß sich die SL(2,C) Eichvarianz, welche die in Vierbeinfeldern formulierte f - g -Theorie aufweist, auf die SL(6,C)-Eichinvarianz ausdehnen läßt. Die entstehende Theorie ist äußerst verwickelt und hängt eng zusammen mit dem Problemkreis der Eichtheorien à la Higgs-Kibble. Für weitere Details, insbesondere auch im Hinblick auf die mit der SL(6,C) verbundenen Schwierigkeiten, verweisen wir auf die zitierten Arbeiten und die dort angegebene Originalliteratur.

LITERATURVERZEICHNIS

Vorbemerkung: Anstelle der üblichen Zeitschriften-Abkürzungen "Phys. Rev.", "Phys.Rev. Lett.", "Phys. Lett.", "J.Math. Phys.", "Nuovo Cim.", "Nuovo Cim. Lett.", "Nucl. Phys." und "Ann.Phys." werden h i e r die Abkürzungen "PR", "PRL", "PL", "JMP", "NC", "NCL", "NP" und "AP" benutzt.

- 1) H. Pagels, PR 144, 1250 (1966)
- 2) s. J.J. Sakurai: "Currents and Mesons" (The University Press of Chicago, Chicago, 1969) und die in diesem Buch zitierte Originalliteratur
- 3) N.M. Kroll, T.D. Lee & B. Zumino, PR 157, 1376 (1967)
- 4) K. Raman, PR D2, 1577 (1970)
- 5) K. Raman, JMP 11, 2935 (1970)
JMP 12, 682 (1971)
- 6) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee, PR D3, 867 (1971)
- 7) B. Zumino: "Effective Lagrangians and Broken Symmetries" in The Brandeis Summer School 1970, Vol. II, p. 439
(Gordon & Breach, New York, 1971)
- 8) J.K. Lawrence & E.T. Tomba, AP 72, 293 (1972)
- 9) C. Aragone & J. Chela-Flores, NC 10A, 818 (1972)
- 10) J. Chela-Flores: "Physical Quantities in a Classical Two-Tensor Theory of Gravitation" Preprint IC/73/88, ICTP, Trieste 1973
- 11) P.C. Aichelburg, PR D8, 377 (1973)
- 12) P.C. Aichelburg, R. Mansouri & H.K. Urbantke, PRL 27, 1533 (1971)
und Acta Physica Austr. 36, 86(1972)

- 13) H.K. Urbantke, NCL 4, 155 (1972)
- 14) R. Mansouri & H.K. Urbantke, Comm. Math. Phys. 26, 301 (1972)
- 15) F.C. Aichelburg, PL 44 B, 370 (1973)
- 16) F.C. Aichelburg & R. Mansouri, NC 10B, 483 (1972)
- 17) R. Mansouri, Acta Physica Austr. 37, 152 (1973)
- 18) A. Maheshwari, NC 8A, 319 (1972)
- 19) S. Arnowitt, M.H. Friedmann & P. Nath, PR D6, 1572 (1972)
- 20) C.J. Isham: "Quantum Gravity"
in Proc. of the 7th Finnish Summer School in Physics,
Loma - Koli, Finland, 1972
- 21) J. Wess: "Tensor and Scalar Dominance of the Energy-Momentum-Tensor"
in "Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics" von
R. Gatto (John-Wiley, New York, 1973)
- 22) S. Coleman: "Dilatations"
in "Properties of Fundamental Interactions", Part A, p. 359
ed. by A. Zichichi (1973, Bologna)
- 23) C.G. Callan, S. Coleman & R. Jackiw, AP 59, 42 (1970)
- 24) S. Coleman & R. Jackiw, AP 67, 552 (1972)
- 25) L.I. Anderson: "Principles of Relativity Physics"
(Academic-Press, New York, 1967)
- 26) A. Trautmann, F. A. E. Pirani & H. Bondi: "Lectures on General
Relativity"
Brandeis-Lectures 1964, Vol. I
(Prentice Hall, New Jersey, 1965)
- 27) S. Weinberg: "Gravitation and Cosmology"
(John Wiley, New York, 1972)
- 28) H.J. Treder: "Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip"
(Akademie-Verlag, Berlin, 1971)
- 29) E. Schrödinger: "Space Time Structure"
(Cambridge University Press, 1950)

- 30) R. Arnowitt & S. Deser, PR 113, 745 (1959)
- 31) P. von Freud, Ann. Math. 40, 417 (1939)
- 32) L.D. Landau & E.M. Lifshitz: "The Classical Theory of Fields"
(Addison-Wesley, Reading, 1962)
- 33) P. Bergmann, PR 112, 287 (1958)
- 34) E. Cartan: "Leçons sur la Théorie des Spineurs", Vol. II
(Hermann, Paris, 1939)
- 35) S. Deser & P. von Nieuwenhuizen, PR D10, 411 (1974)
- 36) H. Weyl, Z. f. Phys. 56, 330 (1929)
- 37) R. Utiyama, PR 101, 1597 (1956)
- 38) T.W.B. Kibble, JMP 2, 212 (1961)
- 39) C.N. Yang & R.L. Mills, PR 96, 191 (1954)
- 40) M. Carmeli, NP B38, 621 (1972)
- 41) A. Salam: "On SL (6,C) Gauge Invariance"
in Proc. of the Coral Gables Conf. 1973, p. 55
- 42) V. Fock, Z. f. Phys. 57, 261 (1929)
- 43) J. Schwinger: "Particles, Sources and Fields"
(Addison-Wesley, Reading, 1970)
- 44) S.N. Gupta, Rev. Mod. Phys. 29, 334 (1957)
- 45) W. Thirring, Fortschr. d. Phys. 7, 79 (1959)
- 46) W. Wyss, Helv. Physica Acta 38, 469 (1965)
- 47) M. Fierz, Helv. Physica Acta 12, 3 (1939)
- 48) M. Fierz & W. Pauli, Proc. Roy. Soc. A173, 211 (1939)
- 49) P. Jordan, Z. f. Phys. 157, 112 (1959)
- 50) R.H. Dicke: "The Theoretical Significance of Experimental Relativity"
(Gordon & Breach, New York, 1964)
- 51) R.U. Sexl, Fortschr. d. Phys. 15, 269 (1967)
- 52) P.G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. 1, 25 (1968)
- 53) E.R. Harrison, PR D6, 2077 (1972)

- 54) H.B. Hart, PR D5, 1256 (1972)
- 55) H. Weyl, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 495 (1918)
Math. Z. 2 (1918)
- 56) T. Fulton, F. Rohrlich & L. Witten, Rev. Mod. Phys. 34, 442 (1962)
- 57) R. Utiyama, Progr. Theor. Phys. 50, 2080 (1973)
- 58) J. Wess: "Conformal Invariance and the Energy-Momentum-Tensor"
in Springer Tracts in Mod. Phys., Vol. 60
(Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971)
- 59) S. Ferrara, R. Gatto & A.F. Grillo: "Conformal Algebra in Space-
Time and Operator Product Ex-
pansion"
Springer Tract in Mod. Phys., Vol. 67
(Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972)
- 60) R.E. Morganstern, PR D3, 2946 (1971)
- 61) J.O' Hanlon & B.O.J. Tupper, NC 14B, 190 (1973)
- 62) E. Cunningham, Proc. London Math. Soc. 8, 77 (1910)
- 63) H. Bateman, Proc. London Math Soc. 8, 223 (1910)
- 64) S. Deser, AP 59, 248 (1970)
- 65) J.L. Anderson, PR D3, 1689 (1971)
- 66) C. Aragone & S. Deser, NC 3A, 709 (1971)
- 67) C. Aragone, A. Restuccia & R. Siri, Gen. Rel. Grav. 5, 643 (1974)
- 68) S. Deser: "Stress Tensors and Conformal Properties of Massive and
Massless Spin 2 Fields"
Preprint LPTHE 71/62 (Orsay, 1971)
- 69) C.A. Orzalezi, J. Sucher & C.H. Woo, PRL 21, 1550 (1968)
- 70) D.R. Divgi & C.H. Woo, PRL 23, 1510 (1969)
- 71) C.A. Orzalezi, Rev. Mod. Phys. 42, 381 (1970)
- 72) J.T. Lopuszanski, JMP 12, 2401 (1971)

- 73) D.G. Boulware & S. Deser, JMP 8, 1468 (1967)
- 74) E. Lubkin, Bull. Am. Phys. Soc., April 1966
- 75) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee, Nature (Phys. Sci.) 244, 82(1973)
- 76) A. Salam: "Impact of Quantum Gravity Theory on Particle Physics"
Preprint IC/74/55/ICTP Trieste (1974)
- 77) A. Trautmann, Nature (Phys. Sci.), 242, 7 (1973)
- 78) P.G.O. Freund, A. Maheshwari & E. Schönberg, Astrophys. J., 157,
857 (1969)
- 79) V.I. Ogievetsky & I.V. Polubarinov, AP 35, 167 (1965)
- 80) H. van Dam & M. Veltman, NP B22, 397 (1970)
- 81) V.E. Barnes et al., PRL 15, 322 (1965)
- 82) S.U. Chang et al., PRL 15, 325 (1965)
- 83) Sh. L. Glashow & R.H. Socolov, PRL 15, 329 (1965)
- 84) E. Flaminio et al.: "Boson and Baryon Spectra and SU(3)"
BLR-Report No. 14572 (unpublished)
- 85) J.J. Sakurai, PR 132, 434 (1963)
- 86) S. Coleman & H.J. Schnitzer, PR 134, B 863 (1964)
- 87) Rosenfeld et al., PL 50B, 1 (1974) (Particle Data Group)
- 88) D. Morgan, PL 51B, 71 (1974)
- 89) J.L. Rosner: "The Classification and Decays of Resonant Particles"
Physics Reports C11, 189 (1974)
- 90) P. Estabrooks, in Proc. Tallahassee Conf. 1973, $\pi\pi$ -Scattering 1973
eds. P.K. Williams & V. Hagopian
(American Inst. of Physics, New York, 1973)
- 91) P. Carruthers, PR D2, 2265 (1970)
PR D3, 959 (1971)
- 92) M.N. Nagels, T.A. Rijken & J.J. de Swart, PRL 31, 569 (1973)
- 93) C. Conforto : "Scalar Mesons"
Invited Talk at the 2nd Intern. Winter Meeting on
Fundamental Physics, Formigdal, Spain, 1974
(Preprint no. 545 (1974) of the Istituto Nazionale
di Fisica Nucleare, Sezione di Roma)

- 94) S. Eliezer: "Partially Conserved Dilation Current and the Asymptotic Limit of $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)$
Preprint ICTP/73/31 - Trieste(1974)
- 95) P. Carruthers: "Broken Scale Invariance in Particle Physics"
Physics Report 1, 1 (1971)
- 96) J. Ellis: "Approximate Scale and Chiral Invariance"
in Proc. of the Coral Gables Conf. 1971, Vol. 2, p. 77
- 97) R.J. Crewther: "Dilaton Width, Tensor Meson Dominance and Broken Conformal Invariance"
in Proc. of the Coral Gables Conf. 1971, Vol. 2, p. 136
- 98) H. Kleinert: "Low Energy Aspects of Broken Scale Invariance"
Acta Physica Austr. Supl. IX, 533 (1972)
- 99) S. Eliezer, NC 16A, 124 (1973)
- 100) K. Raman, PR D3, 2900 (1971)
- 101) S. J. Han, PL 47B, 169 (1973)
- 102) J.J. Kokkedee: "The Quark Model"
(Benjamin, New York, 1969)
- 103) J. Ellis, NP B22, 478 (1970), NP B26, 536 (1971)
- 104) H. Genz & F. Steiner, NCL 1, 355 (1971)
NCL 1, 358 (1971)
- 105) A.K. Bhargava, NCL 5, 66 (1972)
- 106) B. Schrempp-Otto, F. Schrempp & T. F. Walsh, PL 36B, 463 (1971)
- 107) H. Kleinert, NP B38, 87 (1972)
- 108) B. Renner, NP B30, 634 (1971)
- 109) H. Kleinert, NCL 2, 459 (1971)
- 110) J. Baacke, T.H. Chang & H. Kleinert, NC 12A, 21 (1972)
- 111) V. Barger, M. Olsson & K.V.L. Sarma, PR 147, 1115 (1966)
- 112) L.R. Ram Mohan & K.V. Vasavada, PR D9, 2627 (1974)

- 113) B. Renner, Pl B33, 599 (1970)
- 114) H. Goldberg, PR 171, 1485 (1968)
- 115) P. Achuthan, H.G. Schlaile & F. Steiner, NP B24, 398 (1970)
- 116) J. Engels, NP B25, 141 (1971)
- 117) G. Ebel et al., NP B33, 317 (1971)
- 118) Y.C. Lin & I.J. McGee, PR D3, 183 (1971)
- 119) W. Królikowski, NC 46, 106 (1966)
- 120) G.F. Chew & S.C. Frautschi ., PRL 8, 41 (1962)
- 121) V.N. Gribov & I.Y. Pomeranchuk, PRL 8, 343 (1962)
- 122) C. Lovelace, NC 25, 730 (1962)
- 123) P.G.C. Freund, PL 2, 136 (1962)
- 124) D.H. Sharp & W.G. Wagner, PR 131, 2236 (1963)
- 125) W. Selove et al. PRL 9, 272 (1962)
- 126) J.J. Veillet et al. PRL 10, 29 (1963)
- 127) B. R. Desai & P.G.O. Freund, PRL 16, 622 (1966)
- 128) S.H. Patil & Y.P. Yao, PR 153, 1455 (1967)
- 129) R.L. Delbourgo, A. Salam & I. Strathdee, NC 49A, 593 (1967)
- 130) W. Królikowski, PL 24B, 305 (1967)
- 131) M. Gell-Mann, PR 125, 1067 (1962)
- 132) P.G.O. Freund & Y. Nambu, PR 174, 1741 (1968)
- 133) G.B. West, PR 183, 1496 (1969)
- 134) G.C. Joshi & L.K. Pande, PRL 20, 816 (1968)
- 135) M. Gell-Mann: "Symmetry Violation in Hadron Physics"
Lectures given at the Summer School of Theoretical
Physics, University of Hawaii, 1969

- 136) S.P. de Alwis & P.J. O'Donnell, PR D2, 1023 (1970)
- 137) H. Kleinert & P.H. Weisz, NCL 4, 1091 (1970)
- 138) R.J. Crewther, PR D3, 3152 (1971)
- 139) E. Golowich & E. Lasley, PR D 3, 3114 (1971)
- 140) L.N. Chang & P.G.O. Freund, AP 61, 182 (1970)
- 141) K. Raman, PRL 26, 1069 (1971)
- 142) K. Raman, PR D4, 476 (1971)
- 143) K. Raman: "Tensor Meson Dominance and the Stress Tensor"
in Proc. of the Coral Gables Conf. 1971, Vol. 1, p. 112
- 144) P.G.O. Freund, NC 5A, 9 (1971)
- 145) P.G.O. Freund, PL B35, 317 (1971)
- 146) P. Budini & F. Calucci, NCL 1, 1071 (1971)
- 147) G. Takeda, K. Itabashi & T. Akiba, Progr. Theor. Phys. 48,
2077 (1972)
- 148) H. Genz, J. Katz & L.R. Ram Mohan, PR D6, 624 (1972)
- 149) D. Capper & G. Leibbrandt, NC 15A, 92 (1973)
- 150) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee, NCL 5, 969 (1972)
- 151) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee, PR D8, 2600 (1973)
- 152) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee: "Vector and Tensor Gauge Fields
in SL (6,C) Theory"
Preprint IC/73/22, ICTP Trieste (1973)
- 153) C.J. Isham, A. Salam & J. Strathdee, PR D9, 1702 (1974)

LEBENS LAUF

Geboren am 6. April 1941 in Berlin

Besuch der Grundschule in Berlin von 1947 bis 1948

Von Beginn der Berliner Blockade, Ende 1948, bis Ostern 1955 Aufenthalt in der Familie meines Onkels in Kiel

Dort Besuch der Grundschule von der zweiten bis zur vierten Klasse, anschließend Wechsel an das Kieler Humanistische Gymnasium

Ostern 1955 Rückkehr nach Berlin und Eintritt in das Berliner Canisius-Kolleg

Reifeprüfung Februar 1960

Studium der Physik mit Beginn des Sommersemesters 1960 an der Freien Universität Berlin

Vordiplom-Prüfung zu Beginn des Wintersemesters 1962/63 an der Freien Universität

Fortsetzung des Hauptstudiums an der gleichen Universität

Diplomarbeit über ein Thema aus der theoretischen Hochenergie-Physik

Diplom-Hauptprüfung an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 1967/68

Vom 1. April 1968 bis 30. September 1968 wissenschaftlicher Hilfsassistent am Institut für Theoretische Physik der FU Berlin

Während der Universitätsjahre 1968/69 und 1969/70 Studienaufenthalt am Institut de Physique Théorique et Hautes Energies in Orsay (bei Paris) und am Pariser Institut Henri Poincaré (ermöglicht durch Stipendien des Berliner Instituts Français und des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft)

Ab 1. April 1971 wissenschaftlicher Assistent am Institut für Theoretische Physik (Abteilung Hochenergie-Physik) der FU Berlin



